目 录

第一章　基本概念

本章主要介绍李代数理论的最基本概念和一些重要的李代数. 这些重要的李代数有许多方面的应用,所以不能仅仅把它们作为例子来看待.

设 A 是域 F 上的一个 $m\times n$ 矩阵. 我们以后经常使用下面一些符号: $\mathrm{ent}_{ij}A$ 表示 A 的第 i 行,第 j 列的元素; row_iA 表示 A 的第 i 行; col_jA 表示 A 的第 j 列. 若 $m=n$,即 A 是域 F 上的 n 阶方阵,则用 $\det A$ 表示 A 的行列式; $\mathrm{tr}A$ 表示 A 的迹,即

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ent}_{ii}A.$$

我们以 id_S 表示集合 S 的恒等映射.

§1　李　代　数

定义 1.1.1　设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的线性空间,且 $\mathfrak{g}$ 中有二元运算 $(x,y)\to[x,y]$(通常称为**换位运算**或**括积**)满足下列三个条件:

1) 此二元运算是双线性的;

2) $[x,x]=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}$;

3) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

则称 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上的**李代数**(Lie algebra).

定义 1.1.1 中条件 3)称为 **Jacobi 恒等式**.

一个李代数 $\mathfrak{g}$ 的维数即 $\mathfrak{g}$ 作为线性空间的维数 $\dim\mathfrak{g}$.

显然,如果域 F 的特征 $\mathrm{ch}F\neq 2$,则定义 1.1.1 中条件 2)等价于

2′) $[x,y]=-[y,x]$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$,即二元运算是反对称的. 此

时，二元运算只要对一个变量是线性的，自然就是双线性的了.

定义 1.1.1 中条件 3)与下列条件等价：

3′) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$;

3″) $[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$;

3‴) $[[y,z],x]=[[y,x],z]+[y,[z,x]]$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

结合代数是代数学中另一类重要的代数结构. 其定义如下：

定义 1.1.2 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的线性空间，又是一个环，环的加法与线性空间的加法一致，而且满足

$$\lambda(ab)=(\lambda a)\cdot b=a\cdot(\lambda b), \quad \forall\lambda\in F, a,b\in\mathfrak{a}, \tag{1}$$

则称 $\mathfrak{a}$ 是 F 上的**结合代数**，常简称为**代数**.

如果结合代数 $\mathfrak{a}$ 作为环是交换的，则称 $\mathfrak{a}$ 为**交换的结合代数**.

域 F 上的 n 阶方阵的集合对通常的运算构成结合代数，域 F 上的 n 元多项式的集合对通常的运算构成交换的结合代数，等等，结合代数的例子不胜枚举.

结合代数与李代数间有密切的关系，下面定理是这种关系表现之一.

定理 1.1.1 设 $\mathfrak{a}$ 为域 F 上的结合代数，在 $\mathfrak{a}$ 中定义括积运算如下：

$$[a,b]=ab-ba, \quad \forall a,b\in\mathfrak{a}, \tag{2}$$

则 $\mathfrak{a}$ 对于这个括积与线性空间结构，构成 F 上的李代数.

证 显然由(2)有

$$[a,a]=0, \quad \forall a\in\mathfrak{a}.$$

又设 $\lambda_1,\lambda_2\in F$; $a_1,a_2,b\in\mathfrak{a}$. 于是

$$[\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,b]=(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2)b-b(\lambda_1a_1+\lambda_2b_2).$$

由(1)与(2)知

$$[\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,b]=\lambda_1[a_1,b]+\lambda_2[a_2,b].$$

最后，设 $a_1,a_2,a_3\in\mathfrak{a}$，于是不难算出

$$[a_1,[a_2,a_3]]=a_1a_2a_3-a_1a_3a_2-a_2a_3a_1+a_3a_2a_1,$$

$$[a_2,[a_3,a_1]]=a_2a_3a_1-a_2a_1a_3-a_3a_1a_2+a_1a_3a_2,$$

$$[a_3,[a_1,a_2]]=a_3a_1a_2-a_3a_2a_1-a_1a_2a_3+a_2a_1a_3,$$

故 $$[a_1,[a_2,a_3]]+[a_2,[a_3,a_1]]+[a_3,[a_1,a_2]]=0.$$

因而,$\mathfrak{a}$ 是一个李代数. ▌

今后,对结合代数 $\mathfrak{a}$,总可以用上述括积将 $\mathfrak{a}$ 视为李代数. 反过来的问题是:是否任何一个李代数都可以用这种方法构造出来? 回答是肯定的. 我们将在第四章中论述这个答案.

现在,我们还回到李代数的讨论上来. 先看几个简单的例子.

例 1.1.1 以 $\mathrm{gl}(n,F)$ 表示域 F 上所有 n 阶方阵的集合. 对通常的运算 $\mathrm{gl}(n,F)$ 为结合代数,于是也是李代数,其括积为

$$[A,B]=AB-BA,\quad \forall A,B\in\mathrm{gl}(n,F).$$

$\mathrm{gl}(n,F)$ 是 F 上 n^2 维李代数,称为**一般线性李代数**. 为方便起见,我们仍用 $\mathrm{gl}(n,F)$[①] 表示域 F 上 n 阶方阵的李代数.

例 1.1.2 令

$$sl(n,F)=\{A\in\mathrm{gl}(n,F)\mid \mathrm{tr}A=0\},$$

则对于例 1.1.1 中的换位运算,$sl(n,F)$ 是 n^2-1 维李代数,称为**特殊线性李代数**.

例 1.1.3 以 $\mathrm{gl}(V)$ 表示线性空间 V 的所有线性变换的集合. 熟知 $\mathrm{gl}(V)$ 是一个线性空间. 在 $\mathrm{gl}(V)$ 中定义换位运算为

$$[\mathscr{A},\mathscr{B}]=\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A},\quad \forall\mathscr{A},\mathscr{B}\in\mathrm{gl}(V).$$

容易证明 $\mathrm{gl}(V)$ 是一个李代数,亦称为**一般线性李代数**.

例 1.1.4 设 $\mathfrak{m}=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n\mid |x_i|<\varepsilon\}$,其中 $\boldsymbol{R}$ 为实数域,$\varepsilon\in\boldsymbol{R},\varepsilon>0$. 以 $C^\omega(\mathfrak{m})$ 表示定义在 $\mathfrak{m}$ 上的实解析函数的集合. 显然,$C^\omega(\mathfrak{m})$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的无限维线性空间. 令

$$\mathscr{D}(\mathfrak{m})=\left\{L=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\,\middle|\,\mu_i(x)\in C^\omega(\mathfrak{m})\right\}.$$

---

① 以后 $\mathrm{gl}(n,F)$ 既表示域 F 上 n 阶方阵的集合,也表示其李代数. 其他如 $\mathrm{gl}(V)$, $sl(n,F)$, $sl(V)$, $so(n)$, $so(V)$, $sp(n,F)$, $sp(V)$, $u(n)$, $u(V)$, $\mathfrak{b}(n,F)$, $\mathscr{D}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{t}(n,F)$, $\mathfrak{n}(n,F)$ 等类似既表示相应的集合,也表示其相应的李代数.

$\mathscr{D}(\mathfrak{m})$中任一元素 $L=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ 是 $C^\omega(\mathfrak{m})$的线性变换，其定义为

$$L(f(x))=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i},\quad \forall f(x)\in C^\omega(\mathfrak{m}).$$

容易验证 $\mathscr{D}(\mathfrak{m})$是 $\boldsymbol{R}$ 上的无限维线性空间. 在 $\mathscr{D}(\mathfrak{m})$中定义换位运算为

$$[L,M]=LM-ML,\quad \forall L,M\in\mathscr{D}(\mathfrak{m}),$$

则 $\mathscr{D}(\mathfrak{m})$为无限维李代数.

事实上，如果 $L=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$，$M=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$，则

$$[L,M]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mu_j(x)\frac{\partial\lambda_i(x)}{\partial x_j}-\lambda_j(x)\frac{\partial\mu_i(x)}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

故$[L,M]\in\mathscr{D}(\mathfrak{m})$. 换位运算满足定义条件是容易检验的.

定义 1.1.3 若域 F 上的李代数 $\mathfrak{g}$ 中元素 x,y 满足

$$[x,y]=0,$$

则称 x,y 是**交换**的. 若 $\mathfrak{g}$ 中任意二元素均是交换的，则称 $\mathfrak{g}$ 为**交换李代数**或 **Abel 李代数**.

显然，交换结合代数 $\mathfrak{a}$ 所确定的李代数是交换李代数.

例 1.1.5 设 V 是域 F 上的线性空间. 定义

$$[x,y]=0,\quad \forall x,y\in V,$$

则 V 是交换李代数.

例 1.1.6 设 $\mathfrak{d}(n,F)$为域 F 上 n 阶对角方阵的集合，即

$$\mathfrak{d}(n,F)=\{A\in\mathrm{gl}(n,F)\mid A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\},$$

则对例 1.1.1 中的换位运算，$\mathfrak{d}(n,F)$是 n 维交换李代数.

定义 1.1.4 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是域 F 上 n 维李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基，于是有 $C_{ij}^k\in F$，$1\leqslant i,j,k\leqslant n$ 使得

$$[x_i,x_j]=\sum_{k=1}^{n}C_{ij}^k x_k,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

我们称$\{C_{ij}^k\mid 1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$为李代数 $\mathfrak{g}$ 对于基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**结构**

常数.

例 1.1.7 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上 n 维交换李代数的充分必要条件是 $\mathfrak{g}$ 对于任何一组基的结构常数 $C_{ij}^k=0,1\leqslant i,j,k\leqslant n$.

事实上,设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基. 若 $\mathfrak{g}$ 交换,则 $[x_i,x_j]=0$,故 $C_{ij}^k=0$.

反之,若 $C_{ij}^k=0,1\leqslant i,j,k\leqslant n$,则 $[x_i,x_j]=0$. 于是

$$\left[\sum_{i=1}^n a_i x_i,\sum_{j=1}^n b_j x_j\right]=\sum_{i,j}a_ib_j[x_i,x_j]=0,\quad \forall\, a_i,b_j\in F.$$

故 $\mathfrak{g}$ 是交换李代数.

例 1.1.8 在 $sl(2,F)$ 中可取基

$$X_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

则 $sl(2,F)$ 对于基 X_1,X_2,X_3 的结构常数 C_{ij}^k 为

$$C_{ii}^k=0,\quad 1\leqslant i,k\leqslant 3;$$

$$C_{12}^1=C_{21}^1=0,\quad C_{12}^2=-C_{21}^2=2,\quad C_{12}^3=C_{21}^3=0;$$

$$C_{13}^1=C_{31}^1=C_{13}^2=C_{31}^2=0,\quad C_{13}^3=-C_{31}^3=-2;$$

$$C_{23}^1=-C_{32}^1=-1,\quad C_{23}^2=C_{32}^2=C_{23}^3=C_{32}^3=0.$$

定理 1.1.2 设域 F 上 n 维李代数 $\mathfrak{g}$ 对于基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的结构常数为 $C_{ij}^k(1\leqslant i,j,k\leqslant n)$,则

$$C_{ii}^k=0,\quad 1\leqslant i,k\leqslant n;\tag{3}$$

$$C_{ij}^k=-C_{ji}^k,\quad 1\leqslant i,j,k\leqslant n;\tag{4}$$

$$\sum_{l=1}^n(C_{ij}^lC_{lk}^m+C_{ki}^lC_{lj}^m+C_{jk}^lC_{li}^m)=0,\quad 1\leqslant i,j,k,m\leqslant n.\tag{5}$$

反之,若 $C_{ij}^k\in F(1\leqslant i,j,k\leqslant n)$ 满足式(3)—(5),则存在域 F 上的 n 维李代数以 $\{C_{ij}^k\}$ 为结构常数.

证 由 $[x_i,x_i]=0$,立即可得(3).

由 $[x_i,x_j]=-[x_j,x_i]$,立即可得(4).

又由定义 1.1.1 中等价条件 3′),有

$$[[x_i,x_j],x_k]+[[x_k,x_i],x_j]+[[x_j,x_k],x_i]=0.$$

故有

$$\sum_m \sum_l (C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m + C_{jk}^l C_{li}^m) x_m = 0,$$

因而式(5)成立.

反之,设 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上 n 维线性空间. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 设 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, y = \sum_{j=1}^n b_j x_j \in \mathfrak{g}$. 在 $\mathfrak{g}$ 中定义换位运算如下:

$$[x, y] = \sum_{i,j,k} a_i b_j C_{ij}^k x_k.$$

显然,此二元运算是双线性的. 又

$$[x, x] = \sum_{i,j,k} a_i a_j C_{ij}^k x_k = 0.$$

又设 $z = \sum_k c_k x_k$. 则有

$$\begin{aligned}
&[[x,y],z]+[[z,x],y]+[[y,z],x] \\
&= \sum_{i,j,k} \sum_{m,l} a_i b_j c_k (C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m + C_{jk}^l C_{li}^m) x_m \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因而 $\mathfrak{g}$ 是 n 维李代数,对于基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的结构常数为 $\{C_{ij}^k\}$. ▌

注 如果域 F 的特征 $\mathrm{ch}F \neq 2$,则(3)是(4)的特殊情形,不必单独列出.

定理 1.1.3 设域 F 上 n 维李代数 $\mathfrak{g}$ 对于基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与基 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的结构常数分别为 C_{ij}^k 与 $C_{ij}'^k (1 \leqslant i, j, k \leqslant n)$. 又

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

则

$$\sum_{k=1}^n C_{ij}'^k a_{kl} = \sum_{s,t=1}^n a_{is} a_{jt} C_{st}^l, \quad 1 \leqslant i, j, l \leqslant n. \tag{6}$$

证 由假设有

$$[y_i, y_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}'^k y_k = \sum_{k,l} C_{ij}'^k a_{kl} x_l.$$

另一方面又有

$$[y_i,y_j]=\Big[\sum_s a_{is}x_s,\ \sum_t a_{jt}x_t\Big]=\sum_{s,t,l}a_{is}a_{jt}C_{st}^l x_l.$$

故(6)成立.

习　题

1. 试证 3 维实向量空间以向量积为换位运算是一个李代数.

2. 设 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^2)$ 中由 $L_1=\dfrac{\partial}{\partial x_1}, L_2=\dfrac{\partial}{\partial x_2}, L_3=x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}-x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ 线性生成的空间 $\mathfrak{g}$ 对于例 1.1.4 中的换位运算构成一个 3 维李代数. 并求出 $\mathfrak{g}$ 对于基 L_1,L_2,L_3 的结构常数.

3. 设 $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}^3)$ 中由 $L_1=x_2\dfrac{\partial}{\partial x_3}-x_3\dfrac{\partial}{\partial x_2}, L_2=x_3\dfrac{\partial}{\partial x_1}-x_1\dfrac{\partial}{\partial x_3}$, $L_3=x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}-x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ 张成的实 3 维空间为 $\mathfrak{g}$. 试证 $\mathfrak{g}$ 对于例 1.1.4 中的换位运算构成一个李代数. 并求 $\mathfrak{g}$ 对于 L_1,L_2,L_3 的结构常数.

4. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个 2 维李代数,且非交换. 试证 $\mathfrak{g}$ 中有基 x,y 使得

$$[x,y]=x.$$

5. 以 E_{ij} 表示第 i 行,第 j 列处元素为 1,其余元素为 0 的 n 阶方阵. 求李代数 $\mathrm{gl}(n,F)$ 对于基 $\{E_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n\}$ 的结构常数 $C_{(i,j)\,(k,l)}^{(s,t)}$.

§2　子代数、理想与商代数

设 $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的非空子集. 分别以 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n},[\mathfrak{m},\mathfrak{n}]$ 表示由 $\{M+N\mid M\in\mathfrak{m},N\in\mathfrak{n}\},\{[M,N]\mid M\in\mathfrak{m},N\in\mathfrak{n}\}$ 张成的子空间. 显然对于 $\mathfrak{g}$ 的任意子空间 $\mathfrak{m},\mathfrak{n},\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2$ 与 $\mathfrak{p}$ 有下列性质:

1) $[\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2,\mathfrak{n}]\subseteq[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{n}]+[\mathfrak{m}_2,\mathfrak{n}]$;

2) $[\mathfrak{m},\mathfrak{n}]=[\mathfrak{n},\mathfrak{m}]$;

3) $[\mathfrak{m},[\mathfrak{n},\mathfrak{p}]]\subseteq[\mathfrak{n},[\mathfrak{m},\mathfrak{p}]]+[\mathfrak{p},[\mathfrak{m},\mathfrak{n}]]$.

定义 1.2.1 若李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$ 对换位运算封闭,即 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$,则称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的(李)**子代数**.

若 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$ 满足$[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$,则称 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**理想**.

显然,$\mathfrak{g}$ 的理想必为 $\mathfrak{g}$ 的子代数,$\mathfrak{g}$ 的子代数本身也是李代数. $\mathfrak{g}$ 与$\{0\}$自然是 $\mathfrak{g}$ 的理想,称为**平凡理想**.

若 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的子代数,则 $\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 如果 $\mathfrak{h}_1$ 为理想,$\mathfrak{h}_2$ 为子代数,则 $\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2$ 仍为 $\mathfrak{g}$ 的子代数.

若 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想,则 $\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2$ 与$[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2]$也是 $\mathfrak{g}$ 的理想,且有下面关系:

$$\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2\supseteq\mathfrak{h}_i\supseteq\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2\supseteq[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2],\quad i=1,2.$$

例 1.2.1 由 §1 例 1.1.1,例 1.1.2 及例 1.1.6 知 $\mathfrak{d}(n,F)$是 $\mathrm{gl}(n,F)$的子代数. $sl(n,F)$是 $\mathrm{gl}(n,F)$的理想.

事实上,若 $A,B\in\mathrm{gl}(n,F)$,则有

$$\mathrm{tr}([A,B])=\mathrm{tr}(AB-BA)=0.$$

因而有

$$[\mathrm{gl}(n,F),sl(n,F)]\subseteq[\mathrm{gl}(n,F),\mathrm{gl}(n,F)]\subseteq sl(n,F).$$

故 $sl(n,F)$是 $\mathrm{gl}(n,F)$的理想.

定义 1.2.2 设 $\mathfrak{m}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个非空子集. 称

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})=\{X\in\mathfrak{g}\mid[X,M]=0,\quad\forall M\in\mathfrak{m}\}\tag{1}$$

为 $\mathfrak{m}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的**中心化子**. 特别,称 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$为 $\mathfrak{g}$ 的**中心**,简记为 $C(\mathfrak{g})$.

定义 1.2.3 设 $\mathfrak{n}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个子空间. 称

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})=\{X\in\mathfrak{g}\mid[X,N]\in\mathfrak{n},\quad\forall N\in\mathfrak{n}\}\tag{2}$$

为 $\mathfrak{n}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的**正规化子**.

定理 1.2.1 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上李代数.

1) 若 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非空子集,则 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$是 $\mathfrak{g}$ 的子代数;

2) 若 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间,则 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$是 $\mathfrak{g}$ 的子代数;

3) 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数,则 $\mathfrak{h}$ 是 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$的理想;

4) $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想当且仅当 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}$. 此时 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$也是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

证 1) 显然,对于 $M\in\mathfrak{m}$, $[0,M]=0$. 故 $0\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$. 又若 $x,y\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$, $\lambda,\mu\in F$,则

$$[\lambda x+\mu y,M]=\lambda[x,M]+\mu[y,M]=0,\quad \forall M\in\mathfrak{m};$$

$$[[x,y],M]=[[x,M],y]+[x,[y,M]]=0,\quad \forall M\in\mathfrak{m}.$$

故 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$是 $\mathfrak{g}$ 的子代数.

2) 显然,$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})\subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$. 又若 $N\in\mathfrak{n}$; $x,y\in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$; $\lambda,\mu\in F$. 由于 $\mathfrak{n}$ 为子空间,故

$$[\lambda x+\mu y,N]=\lambda[x,N]+\mu[y,N]\in\mathfrak{n};$$

$$\begin{aligned}[[x,y],N]&=[[x,N],y]+[x,[y,N]]\\&\in[\mathfrak{n},N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})]+[N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n}),\mathfrak{n}]\subseteq\mathfrak{n}.\end{aligned}$$

故 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$是 $\mathfrak{g}$ 的子代数.

3) 若 $\mathfrak{h}$ 为子代数,即$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$. 因而 $\mathfrak{h}\subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. 再由$[N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}),\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$,故 $\mathfrak{h}$ 为 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$的理想.

4) $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想,即$[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$ 当且仅当 $\mathfrak{g}\supseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\supseteq\mathfrak{g}$,即 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想,由

$$\begin{aligned}[[\mathfrak{g},C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})],\mathfrak{h}]&\subseteq[[\mathfrak{g},\mathfrak{h}],C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})]+[\mathfrak{g},[C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}),\mathfrak{h}]]\\&\subseteq[\mathfrak{h},C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})]+[\mathfrak{g},0]=\{0\}\end{aligned}$$

知 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$为 $\mathfrak{g}$ 的理想. ▎

推论 李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心 $C(\mathfrak{g})$是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

因为 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想,$C(\mathfrak{g})=C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$之故. ▎

例 1.2.2 $C(\mathfrak{gl}(n,F))=\{\lambda I_n\mid\lambda\in F, I_n$ 单位方阵$\}$.

定理 1.2.2 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 在 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=\{\bar{x}=x+\mathfrak{h}\mid x\in\mathfrak{g}\}$中定义换位运算为

$$[\bar{x},\bar{y}]=\overline{[x,y]},\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.\tag{3}$$

则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 也是李代数,称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的**商代数**.

证 我们首先要证明定义(3)的合理性. 设 $\bar{x}=\bar{x}_1$, $\bar{y}=\bar{y}_1$,即 $x-x_1, y-y_1\in\mathfrak{h}$. 由

$$[x,y]-[x_1,y_1]=[x-x_1,y]+[x_1,y-y_1]\in\mathfrak{h},$$

知$\overline{[x,y]}=\overline{[x_1,y_1]}$, 即定义(3)是合理的.

关于李代数定义中换位运算的三个定义条件可以很容易地直接验证,故略去. ▌

定理 1.2.3 设 $\mathfrak{g}$ 是李代数,则 $\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$是 $\mathfrak{g}$ 的理想,称为 $\mathfrak{g}$ 的**导代数**或**换位子代数**.

若 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想,则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 为交换李代数当且仅当 $\mathfrak{h}\supseteq\mathfrak{g}^{(1)}$.

证 显然$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}^{(1)}$是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 若 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 则由(3)知 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 为交换李代数,即$[\mathfrak{g}/\mathfrak{h},\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]=\{0\}$,当且仅当 $\forall x,y\in\mathfrak{g}$, $[x,y]\in\mathfrak{h}$,即 $\mathfrak{g}^{(1)}\subseteq\mathfrak{h}$. ▌

定义 1.2.4 若李代数 $\mathfrak{g}$ 无非零的交换理想,则称 $\mathfrak{g}$ 为**半单的**. 又若半单李代数 $\mathfrak{g}$ 还无非平凡的理想,则称 $\mathfrak{g}$ 为**单李代数**.

显然,若 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数,则 $C(\mathfrak{g})=\{0\}$. 又若 $\mathfrak{g}$ 为单李代数,则 $\mathfrak{g}^{(1)}=\mathfrak{g}$.

例 1.2.3 设 F 是一个域. 则 $\mathrm{ch}F\neq 2$ 时,$sl(2,F)$为单李代数;$\mathrm{ch}F=2$ 时,$sl(2,F)$不是单李代数.

先讨论 $\mathrm{ch}F\neq 2$ 的情形. 设 $\mathfrak{h}$ 为一非零理想. X_1,X_2 与 X_3 如例 1.1.8 所述. 又设 $\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3$ 为 $\mathfrak{h}$ 中一非零元素,即 λ_1, λ_2,λ_3 不全为零. 于是

$$[X_1,\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3]=2(\lambda_2X_2-\lambda_3X_3)\in\mathfrak{h}.$$

若 $\lambda_2=\lambda_3=0$,则 $\lambda_1\neq 0$,于是 $X_1\in\mathfrak{h}$. 设 λ_2,λ_3 不全为零,不妨设 $\lambda_2\neq 0$,故

$$[X_3,\lambda_2X_2-\lambda_3X_3]=-\lambda_2X_1\in\mathfrak{h},$$

亦有 $X_1\in\mathfrak{h}$.因而 $X_2=\frac{1}{2}[X_1,X_2],X_3=\frac{1}{2}[X_3,X_1]\in\mathfrak{h}$. 由此知 $\mathfrak{h}=sl(2,F)$, 即 $sl(2,F)$为单李代数.

若 $\mathrm{ch}F=2$, 则有 $I_2\in sl(2,F)$. 显然有,$I_2\in C(sl(2,F))$. 故 $sl(2,F)$不是单李代数. ▌

习　题

1. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间, $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 是 $\mathfrak{h}$ 的基, $\mathfrak{g}$ 对

于基 $X_1,X_2,\cdots,X_r,X_{r+1},\cdots,X_n$ 的结构常数为 $C_{ij}^k(1\leqslant i,j,k\leqslant n)$. 试证

1) $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数的充分必要条件为

$$C_{ij}^k=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant r, r+1\leqslant k\leqslant n.$$

2) $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想的充分必要条件为

$$C_{ij}^k=0,\quad \min(i,j)\leqslant r, k>r.$$

2. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 为 $\mathfrak{h}$ 的基, $\mathfrak{g}$ 对于基 $X_1,\cdots,X_r,X_{r+1},\cdots,X_n$ 的结构常数为 $C_{ij}^k(1\leqslant i,j,k\leqslant n)$. 试求商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 对于基 $\overline{X}_{r+1},\cdots,\overline{X}_n$ 的结构常数.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为 2 维非交换李代数,试求 $\mathfrak{g}^{(1)}$ 与 $C(\mathfrak{g})$.

4. 设 $\mathfrak{g}$ 是单李代数,试证 $\dim\mathfrak{g}\geqslant 3$.

5. 求 $sl(3,F)$的中心与导代数.

§3 同态与同构

定义 1.3.1 设 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ 都是域 F 上的李代数. 若 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的线性映射 $\mathscr{A}$ 满足:

$$[\mathscr{A}(x),\mathscr{A}(y)]=\mathscr{A}([x,y]),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}_1,\tag{1}$$

则称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的**同态映射**或**同态**.

若 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的同态 $\mathscr{A}$ 还是满(映上)映射,即

$$\mathscr{A}(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_2,\tag{2}$$

则称 $\mathscr{A}$ 是**满(映上)同态**,并称 $\mathfrak{g}_2$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的**同态像**.

设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的同态,则称

$$\mathscr{A}^{-1}(0)=\{x\in\mathfrak{g}_1\mid\mathscr{A}(x)=0\}\tag{3}$$

为 $\mathscr{A}$ 的**核**,也记作 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$.

定义 1.3.2 若 $\mathscr{A}$ 为李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到李代数 $\mathfrak{g}_2$ 的线性同构,又是李代数的同态,则称 $\mathscr{A}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的**同构**,并称 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构,记为 $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_2$.

$\mathscr{A}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的同构，即 $\mathscr{A}$ 为线性映射，且满足(1)，(2) 及 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}=\{0\}$. 显然，李代数间的同构关系是一个等价关系.

定义 1.3.3 李代数 $\mathfrak{g}$ 到自身的同态称为 $\mathfrak{g}$ 的**自同态**，$\mathfrak{g}$ 的所有自同态记作 $\mathrm{End}\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ 到自身的同构称为**自同构**，$\mathfrak{g}$ 的所有自同构构成一个群，称为 $\mathfrak{g}$ 的**自同构群**，记作 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$.

例 1.3.1 设 V 是 F 上的 n 维线性空间，则李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 与李代数 $\mathrm{gl}(n,F)$ 同构.

事实上，在 V 中取定一组基 $\varepsilon=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$. 以 $M(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}\in\mathrm{gl}(V)$ 在 ε 下的矩阵. 于是映射 $\mathscr{A}\to M(\mathscr{A})$ $(\forall\mathscr{A}\in\mathrm{gl}(V))$ 是 $\mathrm{gl}(V)$ 到 $\mathrm{gl}(n,F)$ 的同构映射.

例 1.3.2 设 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上 n 维交换李代数，则 $\mathfrak{g}$ 的任何线性变换都是 $\mathfrak{g}$ 的自同态，即 $\mathrm{End}\mathfrak{g}=\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$；$\mathfrak{g}$ 的任何可逆线性变换都是 $\mathfrak{g}$ 的自同构，即 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}=GL(\mathfrak{g})$，这里 $GL(V)$ 表示线性空间 V 的所有可逆线性变换构成的群，称为**一般线性群**.

定理 1.3.1 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想，则 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的线性自然映射 π：

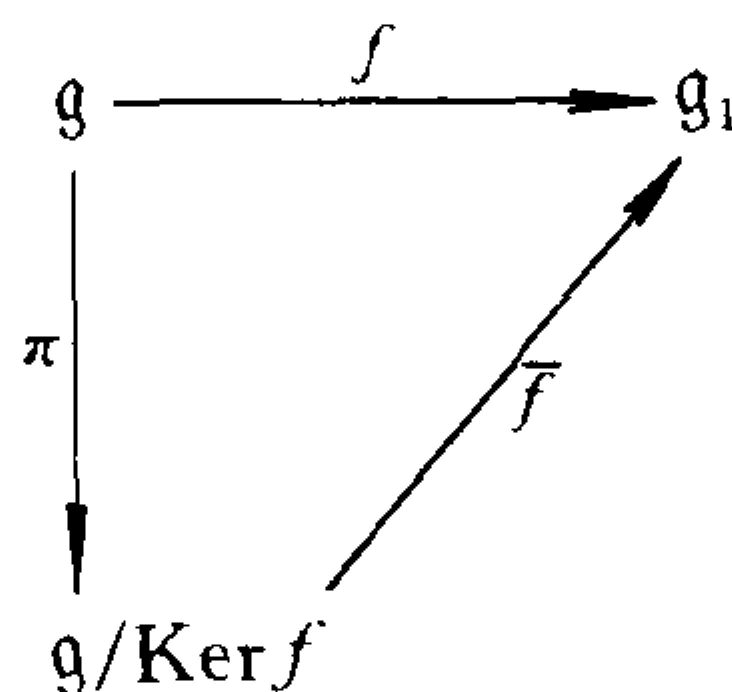
$$\pi(x)=x+\mathfrak{h},\quad \forall x\in\mathfrak{g} \tag{4}$$

是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的满同态，π 也称为**自然同态**.

又若 f 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 的满同态，则 $\mathrm{Ker}f$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，并且有 $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 的同构映射 $\bar{f}$ 满足

$$\bar{f}\circ\pi=f, \tag{5}$$

这里 π 表示 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f$ 的自然同态. 或者说有下面可交换的同态图表：



证 显然，π 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的满线性映射. 由于 $\mathfrak{h}$ 为理想，故 $\forall x,y\in\mathfrak{g}$，有

$$[\pi(x),\pi(y)]=[x+\mathfrak{h},y+\mathfrak{h}]=[x,y]+\mathfrak{h}=\pi([x,y]).$$

因而 π 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的满同态.

由于 f 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 的同态，故 $\mathrm{Ker}f$ 是 $\mathfrak{g}$ 的线性子空间，且由

$$f([\mathfrak{g},\mathrm{Ker}f])=[f(\mathfrak{g}),f(\mathrm{Ker}f)]=[\mathfrak{g}_1,0]=\{0\}$$

知 $[\mathfrak{g},\mathrm{Ker}f]\subseteq\mathrm{Ker}f$，即 $\mathrm{Ker}f$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

从线性代数理论知 $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 的映射 $\bar{f}$：

$$\bar{f}(\pi(x))=f(x),\quad \forall\pi(x)\in\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f$$

是线性同构映射，满足(5). 又 $\forall\pi(x),\pi(y)\in\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f$，有

$$\begin{aligned}\bar{f}([\pi(x),\pi(y)])&=\bar{f}(\pi([x,y]))=f([x,y])\\&=[f(x),f(y)]=[\bar{f}(\pi(x)),\bar{f}(\pi(y))].\end{aligned}$$

故 $\bar{f}$ 是李代数的同构映射. ▌

定理 1.3.2 设 f 是李代数 $\mathfrak{g}$ 到李代数 $\mathfrak{h}$ 的满同态，$\mathfrak{k}=\mathrm{Ker}f$，则下面结果成立：

1) f 建立了 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\mathfrak{k}$ 的子代数与 $\mathfrak{h}$ 的子代数之间的一一对应；

2) 上述对应将理想对应到理想；

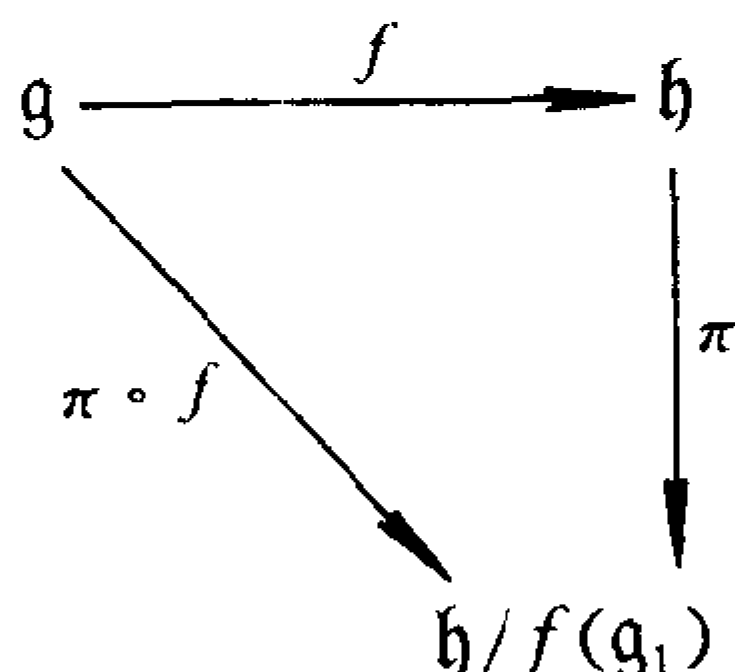
3) 若 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，且 $\mathfrak{g}_1\supseteq\mathfrak{k}$，则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ 同构于 $\mathfrak{h}/f(\mathfrak{g}_1)$.

证 1) 从线性代数理论我们可知，f 建立了 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\mathfrak{k}$ 的子空间与 $\mathfrak{h}$ 的子空间之间的一一对应：$f(f^{-1}(\mathfrak{h}_1))=\mathfrak{h}_1$，其中 $\mathfrak{h}_1$ 为 $\mathfrak{h}$ 的子空间. 而 $f^{-1}(\mathfrak{h}_1)=\{x\in\mathfrak{g}\mid f(x)\in\mathfrak{h}_1\}$. 由于 f 是同态，故 $[f^{-1}(\mathfrak{h}_1),f^{-1}(\mathfrak{h}_1)]\subseteq f^{-1}(\mathfrak{h}_1)$ 当且仅当 $[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_1]\subseteq\mathfrak{h}_1$，即 $f^{-1}(\mathfrak{h}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数当且仅当 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{h}$ 的子代数.

2) 由于 f 是满同态，即 $f(\mathfrak{g})=\mathfrak{h}$. 又由于 $\mathfrak{g}=f^{-1}(\mathfrak{h})$，故 $[\mathfrak{g},f^{-1}(\mathfrak{h}_1)]\subseteq f^{-1}(\mathfrak{h}_1)$ 当且仅当 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}_1]\subseteq\mathfrak{h}_1$，即 $f^{-1}(\mathfrak{h}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想当且仅当 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{h}$ 的理想.

3) 设 $\mathfrak{g}_1\supseteq\mathfrak{k}$，且 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 于是由 2) 知 $f(\mathfrak{g}_1)$ 为 $\mathfrak{h}$ 的理

想. 令 π 为 $\mathfrak{h}$ 到 $\mathfrak{h}/f(\mathfrak{g}_1)$的自然同态. 因而 $\pi\circ f$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}/f(\mathfrak{g}_1)$的满同态,就有下面的同态交换图表:



于是由

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\pi\circ f)&=\{x\in\mathfrak{g}\,|\,\pi\circ f(x)=f(\mathfrak{g}_1)\}\\&=\{x\in\mathfrak{g}\,|\,f(x)\in f(\mathfrak{g}_1)\}\\&=f^{-1}(f(\mathfrak{g}_1))=\mathfrak{g}_1,\end{aligned}$$

知 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{h}/f(\mathfrak{g}_1)$同构. ▌

推论 1 设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 分别为李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想与子代数,则 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{b}$ 的理想,且$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ 同构.

事实上,设 π 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 的自然同态. 又设 f 为 π 在 $\mathfrak{b}$ 上的限制,即 $f=\pi|_{\mathfrak{b}}$. 于是,$f(\mathfrak{b})$与 $\mathfrak{b}/\mathrm{Ker}f$ 同构,$\pi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$与$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ 同构. 又由 $f(\mathfrak{b})=\pi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$,

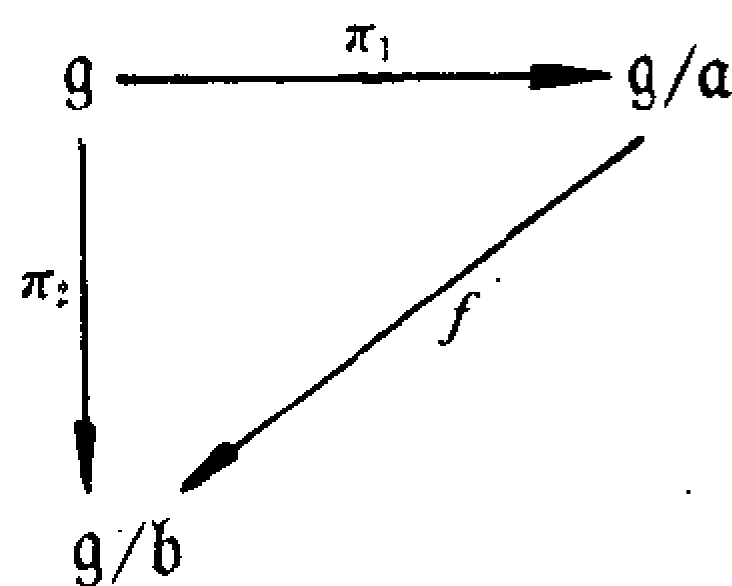
$$\mathrm{Ker}f=\{x\in\mathfrak{b}\,|\,f(x)=\pi(x)=0\}=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}.$$

故 $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ 与$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ 同构.

推论 2 设 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 都是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想,且 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{g}$,则$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ 同构.

设 π_1,π_2 分别为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a},\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ 的自然同态. 于是有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ 的满线性映射 f,使得

$$\pi_2=f\circ\pi_1,$$



如右图所示. 而且

$$\mathrm{Ker}f=\mathfrak{b}/\mathfrak{a}.$$

又 $\forall x,y\in\mathfrak{g}$,有

$$
\begin{aligned}
&[f(\pi_1(x)),f(\pi_1(y))]\\
&\quad=[\pi_2(x),\pi_2(y)]=\pi_2([x,y])\\
&\quad=f(\pi_1([x,y]))\\
&\quad=f([\pi_1(x),\pi_1(y)]),
\end{aligned}
$$

故 f 是同态映射，$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ 与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ 同构. ▌

一类用得很普遍的重要同态是李代数 $\mathfrak{g}$ 到线性李代数 $\mathrm{gl}(V)$ 中的同态.

定义 1.3.4 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数，V 是 F 上的线性空间. 若 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{gl}(V)$ 中的一个同态，则称 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个以 V 为**表示空间的线性表示**，简称**表示**. $\dim V$ 称为**表示的维数**. 称 $\mathrm{Ker}\rho$ 为**表示的核**.

通常以 (ρ,V) 记以 V 为表示空间的表示. 下面的定理给出了李代数的一个重要表示.

定理 1.3.3 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数，则对任一 $x\in\mathfrak{g}$，可定义 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 中一个元素 $\mathrm{ad}x$ 为：

$$\mathrm{ad}x(y)=[x,y],\quad \forall y\in\mathfrak{g}. \tag{6}$$

$\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 的映射 $x\to\mathrm{ad}x$ 是 $\mathfrak{g}$ 的以 $\mathfrak{g}$ 为表示空间的一个表示，称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**，记作 $(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$ 或 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$，且 $\mathrm{Ker\,ad}=C(\mathfrak{g})$.

证 由于换位运算 $[x,y]$ 对于 y 是线性的，于是由(6)定义的 $\mathrm{ad}x\in\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$. 又由换位运算 $[x,y]$ 对 x 也是线性的，于是映射 $x\to\mathrm{ad}x$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 的线性映射. 又 $\forall x_1,x_2,y\in\mathfrak{g}$，我们有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}[x_1,x_2](y)&=[[x_1,x_2],y]\\
&=[[x_1,y],x_2]+[x_1,[x_2,y]]\\
&=[x_1,[x_2,y]]-[x_2,[x_1,y]]\\
&=(\mathrm{ad}x_1\,\mathrm{ad}x_2-\mathrm{ad}x_2\,\mathrm{ad}x_1)(y)\\
&=[\mathrm{ad}x_1,\mathrm{ad}x_2](y),
\end{aligned}
$$

即有

$$\mathrm{ad}([x_1,x_2])=[\mathrm{ad}x_1,\mathrm{ad}x_2],\quad \forall x_1,x_2\in\mathfrak{g}, \tag{7}$$

故 $x\to\mathrm{ad}x$ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 中的同态，即 $(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的表示.

又 $x\in\mathrm{Ker\,ad}$ 当且仅当 $\mathrm{ad}x=0$，当且仅当 $\forall y\in\mathfrak{g}$，$[x,y]=0$，即 $x\in C(\mathfrak{g})$. 于是 $\mathrm{Ker\,ad}=C(\mathfrak{g})$. ▌

推论 单李代数 $\mathfrak{g}$ 一定与某个线性李代数(即一般线性李代数的子代数)同构.

事实上，由于 $C(\mathfrak{g})=\{0\}$，故 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 同构，而 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 的子代数. ▌

习　　题

1. 证明：若 f 是李代数 $\mathfrak{g}$ 到交换李代数 $\mathfrak{h}$ 的同态，则 $\mathfrak{g}^{(1)}\subseteq\mathrm{Ker}f$.

2. 设 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ 都是域 F 上的李代数，以 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$ 表示所有 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的同态的集合，试证 $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)$ 为域 F 上的线性空间.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上的李代数，试证 $\mathrm{End}\mathfrak{g}$ 为 F 上的结合代数.

4. 设 $\mathfrak{g}$ 是 3 维李代数，且 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$，试证 $\mathfrak{g}$ 是单李代数.

§4　线性李代数

我们称一般线性李代数 $\mathrm{gl}(n,F)$（或 $\mathrm{gl}(V)$，V 是域 F 上的 n 维线性空间)的子代数为**线性李代数**. 如 $sl(n,F)$，$\mathfrak{d}(n,F)$ 都是线性李代数. 本节还将举出一些重要的线性李代数.

定理 1.4.1 设 M 是域 F 上的 n 阶方阵，则

$$g(n,M,F)=\{X\in\mathrm{gl}(n,F)\mid XM+MX'=0\}\tag{1}$$

是 F 上的线性李代数. 又若 M 与 M_1 合同，即有 F 上 n 阶可逆方阵 A 使得 $M_1=AMA'$，则 $g(n,M,F)$ 与 $g(n,M_1,F)$ 同构.

证 显然，$g(n,M,F)$ 是 $\mathrm{gl}(n,F)$ 的子空间. 又设 $X,Y\in g(n,M,F)$，于是由

$$\begin{aligned}[X,Y]M+M[X,Y]'&=(XY-YX)M+M(Y'X'-X'Y')\\&=X(YM+MY')-Y(XM+MX')=0\end{aligned}$$

知 $[X,Y]\in g(n,M,F)$，故 $g(n,M,F)$ 是 F 上的线性李代数.

因为 A 可逆，$M_1=AMA'$. 定义 $\mathrm{gl}(n,F)$ 的线性变换 f 如下：

$$f(X)=AXA^{-1}, \quad \forall X\in \mathrm{gl}(n,F). \tag{2}$$

显然，$f\in GL(\mathrm{gl}(n,F))$. 又 $\forall X,Y\in \mathrm{gl}(n,F)$，有

$$f([X,Y])=A(XY-YX)A^{-1}=[f(X),f(Y)].$$

故 $f\in \mathrm{Aut}(\mathrm{gl}(n,F))$.

又 $XM+MX'=0$，当且仅当 $A(XM+MX')A'=0$，当且仅当 $AXA^{-1}AMA'+AMA'A'^{-1}X'A'=0$，当且仅当 $f(X)M_1+M_1f(X)'=0$. 故 $f(g(n,M,F))=g(n,M_1,F)$，即 $g(n,M,F)$ 与 $g(n,M_1,F)$ 同构. ▌

从这个定理我们可以得到下列重要李代数，以下均以 I_n 表示 n 阶单位方阵.

$so(n,\boldsymbol{C})=g(n,I_n,\boldsymbol{C})$ 称为**复正交李代数**. 当 $n=2m+1$ 时，记 $so(2m+1,\boldsymbol{C})=B_m$. 当 $n=2m$ 时，记 $so(2m,\boldsymbol{C})=D_m$.

$so(n)=so(n,\boldsymbol{R})=g(n,I_n,\boldsymbol{R})$ 称为**实正交李代数**.

令

$$J_n:=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

$sp(n,\boldsymbol{C})=g(2n,J_n,\boldsymbol{C})$ 称为**复辛李代数**，也记为 C_n.

$sp(n,\boldsymbol{R})=g(2n,J_n,\boldsymbol{R})$ 称为**实辛李代数**.

令

$$I_{pq}=\begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

$so(p,q)=g(p+q,I_{pq},\boldsymbol{R})$ 称为**(p,q)型 Lorentz 李代数**.

定理 1.4.2 设 M 是一个 n 阶复矩阵，则

$$g^*(n,M,\boldsymbol{C})=\{X\in \mathrm{gl}(n,\boldsymbol{C})\mid X'M+M\overline{X}=0\} \tag{2}$$

（这里 X'，$\overline{X}$ 分别表示 X 的转置，共轭）是 $\boldsymbol{R}$ 上的李代数.

证 设 $X,Y\in g^*(n,M,\boldsymbol{C})$，$a,b\in \boldsymbol{R}$，则

$$(aX+bY)'M+M\overline{(aX+bY)}$$
$$=a(X'M+M\overline{X})+b(Y'M+M\overline{Y})=0,$$

故 $g^*(n,M,\boldsymbol{C})$是 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间. 又

$$[X,Y]'M+M\overline{[X,Y]}=(Y'X'-X'Y')M+M(\overline{X}\,\overline{Y}-\overline{Y}\,\overline{X})$$
$$=Y'(X'M+M\overline{X})-X'(Y'M+M\overline{Y})=0,$$

故$[X,Y]\in g^*(n,M,\boldsymbol{C})$. 因而 $g^*(n,M,\boldsymbol{C})$是 $\boldsymbol{R}$ 上的李代数. ∎

$u(p,q)=g^*(p+q,I_{p+q},\boldsymbol{C})$称为$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$**型酉李代数**. 特别, $p=0,q=n$ 时,$u(n)=u(0,n)$称为**酉李代数**.

$su(p,q)=u(p,q)\cap sl(p+q,\boldsymbol{C})$称为**特殊**$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$**型酉李代数**.

$su(n)=u(n)\cap sl(n,\boldsymbol{C})$称为**特殊酉李代数**.

令

$$K_{pq}=\begin{pmatrix} I_{pq} & 0 \\ 0 & I_{pq} \end{pmatrix}.$$

$sp(p,q)=sp(p+q,\boldsymbol{C})\cap g^*(2(p+q),K_{pq},\boldsymbol{C})$称为$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$**型辛李代数**.

$sp(n)=sp(0,n)=sp(n,\boldsymbol{C})\cap u(2n)$称为**辛李代数**.

$so^*(2n)=g^*(2n,J_n,\boldsymbol{C})\cap so(2n,\boldsymbol{C})$称为**特殊正交星李代数**.

定理 1.4.3 $sl(2n,\boldsymbol{C})$中子集

$$su^*(2n)=\{X\in sl(2n,\boldsymbol{C})\mid \overline{X}J_n-J_nX=0\} \tag{3}$$

是 $\boldsymbol{R}$ 上的李代数,称为**特殊酉星李代数**.

证 设 $X,Y\in su^*(2n)$,$a,b\in\boldsymbol{R}$,则由

$$\mathrm{tr}(aX+bY)=a\mathrm{tr}X+b\mathrm{tr}Y=0;$$
$$\overline{(aX+bY)}J_n-J_n(aX+bY)=a(\overline{X}J_n-J_nX)+b(\overline{Y}J_n-J_nY)=0;$$
$$\overline{[X,Y]}J_n-J_n[X,Y]=\overline{X}(\overline{Y}J_n-J_nY)-\overline{Y}(\overline{X}J_n-J_nX)=0,$$

知 $su^*(2n)$是 $\boldsymbol{R}$ 上的李代数. ∎

上述李代数不仅在李代数理论中而且在微分几何(例如 Riemann 对称空间)理论及物理学中都有许多应用. 以下再介绍两类重要的线性李代数.

设 $\mathrm{t}(n,F)$为域 F 上所有 n 阶上三角矩阵的集合,即

$$\mathrm{t}(n,F)=\{X\in \mathrm{gl}(n,F)\mid \mathrm{ent}_{ij}X=0,\quad i>j\}.$$

显然，$\mathfrak{t}(n,F)$是$\mathfrak{gl}(n,F)$的子代数.

设$\mathfrak{n}(n,F)$为域F上所有n阶对角线上元素相等的上三角矩阵的集合，即

$$\mathfrak{n}(n,F)=\{X\in\mathfrak{t}(n,F)\mid \mathrm{ent}_{jj}X=\mathrm{ent}_{ii}X,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n\}.$$

显然，$\mathfrak{n}(n,F)$是$\mathfrak{gl}(n,F)$的子代数. 有的著作或文章中也常以$\mathfrak{n}(n,F)$表示n阶严格上三角矩阵的集合$\{X\in\mathfrak{t}(n,F)\mid \mathrm{ent}_{ii}X=0,1\leqslant i\leqslant n\}$，这也是线性李代数，容易证明

$$[\mathfrak{t}(n,F),\mathfrak{t}(n,F)]=\{X\in\mathfrak{t}(n,F)\mid \mathrm{ent}_{ii}X=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n\}. \tag{4}$$

习 题

1. 设M是n阶复矩阵，若有n阶可逆复矩阵A，使得$M_1=A'M\overline{A}$，则$g^*(n,M,\mathbf{C})$同构于$g^*(n,M_1,\mathbf{C})$.

2. 设M是n阶复矩阵，则$\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbf{C})\mid \overline{X}M-MX=0\}$是$\mathbf{R}$上的李代数.

3. 试证

$$H=\left\{\begin{pmatrix}0 & X & z\\ 0 & 0 & Y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\middle| X\in\mathbf{C}^{1\times n},z\in\mathbf{C},Y\in\mathbf{C}^{n\times 1}\right\}$$

是$\mathfrak{gl}(n+2,\mathbf{C})$的子代数，并求$H$的中心. H称为**Heisenberg 李代数**.

4. 以$\mathbf{Z}_+$表示非负整数集，令

$$L=F[t,t^{-1}]=\left\{\sum_{i=-m}^{n}a_it^i\,\middle|\,a_i\in F,m,n\in\mathbf{Z}_+\right\}$$

为域F上以t为不定元的**Laurent 多项式代数**. 又$t^s\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$为$L$的导子，即$t^s\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$为$L$的线性变换，且

$$t^s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)g(t))=\left(t^s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right)g(t)+f(t)\left(t^s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)\right),$$

$\forall f(t), g(t) \in L$. 令 $\mathfrak{d}$ 为由 $\left\{t^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \middle| s \in \mathbf{Z}\right\}$ 生成的线性空间. 证明 $\forall X, Y \in \mathfrak{d}, [X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{d}$, 而且 $\mathfrak{d}$ 对此运算为李代数. $\mathfrak{d}$ 称为 **Virasaro 代数**.

5. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数, $L = F[t, t^{-1}]$ 为 F 上的 Laurent 多项式代数. 试证

$$L(\mathfrak{g}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(t) x_i \mid f_i(t) \in L, x_i \in \mathfrak{g} \right\} \cong L \otimes_F \mathfrak{g}.$$

关于满足下面条件的换位运算[，]

$$[f(t)x, g(t)y] = f(t)g(t)[x, y], \quad \forall f(t), g(t) \in L; x, y \in \mathfrak{g},$$

构成 F 上的李代数. 称 $L(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 **loop 代数**. (注意, 当 $\dim\mathfrak{g} \neq 0$ 时, $\dim L(\mathfrak{g}) = \infty$.)

§5 导　　子

定义 1.5.1 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数. 如果 $\mathfrak{g}$ 的线性变换 D 满足

$$D([x, y]) = [Dx, y] + [x, Dy], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, \tag{1}$$

则称 D 为 $\mathfrak{g}$ 的**导子**. $\mathfrak{g}$ 的所有导子的集合记为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$.

由 §3 知, $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}x$ 是 $\mathfrak{g}$ 的线性变换. 显然, $\mathrm{ad}x([y, z]) = [\mathrm{ad}x(y), z] + [y, \mathrm{ad}x(z)]$, $\forall y, z \in \mathfrak{g}$. 于是 $\mathrm{ad}x$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的导子, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内导子**. 而 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的所有内导子的集合, 不是内导子的导子称为**外导子**.

定理 1.5.1 李代数 $\mathfrak{g}$ 的导子集 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 的子代数. 又若 $D \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}, x \in \mathfrak{g}$, 则

$$[D, \mathrm{ad}x] = \mathrm{ad}Dx. \tag{2}$$

因而 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想.

证 容易验证 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ 的线性子空间. 又设 $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}\mathfrak{g}, y, z \in \mathfrak{g}$. 则由

$$[D_1, D_2]([x, y]) = D_1 D_2([x, y]) - D_2 D_1([x, y])$$

$$=[[D_1,D_2]x,y]+[x,[D_1,D_2]y]$$

知$[D_1,D_2]\in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 故 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$的子代数.

又若 $D\in \mathrm{Der}\mathfrak{g}, x,y\in\mathfrak{g}$,则

$$[D,\mathrm{ad}x](y)=(D\cdot \mathrm{ad}x-\mathrm{ad}x\cdot D)y=\mathrm{ad}Dx(y).$$

故(2)成立. 因而 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想. ▌

定理 1.5.2 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数. 若 $D\in \mathrm{Der}\mathfrak{g}, x,y\in\mathfrak{g}$, $a,b\in F$,则对任何 $k\in \boldsymbol{N}$,有

$$(D-(a+b)\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^k([x,y])=\sum_{s=0}^{k}C_k^s[(D-a\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^s x,(D-b\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k-s}y],\tag{3}$$

$$D^k([x,y])=\sum_{s=0}^{k}C_k^s[D^s x,D^{k-s}y].\tag{4}$$

证 若在(3)中令 $a=b=0$,则由(3)可得(4). 现用归纳法证明(3).

$$\begin{aligned}&(D-(a+b)\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})([x,y])\\&\quad=[Dx,y]+[x,Dy]-[ax,y]-[x,by]\\&\quad=[(D-a\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})x,y]+[x,(D-b\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})y],\end{aligned}$$

即 $k=1$ 时,(3)成立. 设 $k-1$ 时,(3)成立,则

$$\begin{aligned}&(D-(a+b)\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^k([x,y])\\&=(D-(a+b)\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\Big(\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^s[(D-a\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^s x,(D-b\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k-1-s}y]\Big)\\&=\sum_{s=0}^{k-1}C_{k-1}^s\Big([(D-a\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{s+1}x,(D-b\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k-1-s}y]\\&\qquad+[(D-a\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^s x,(D-b\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k-s}y]\Big)\\&=\sum_{s=0}^{k}C_k^s[(D-a\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^s x,(D-b\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k-s}y].\end{aligned}$$

故(3),从而(4)成立. ▌

引理 1.5.3 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数. 又 $\mathscr{A}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构,则

$$\mathscr{A}\cdot \mathrm{ad}x\cdot\mathscr{A}^{-1}=\mathrm{ad}\mathscr{A}x,\quad \forall x\in\mathfrak{g}.\tag{5}$$

证 任取 $y\in\mathfrak{g}$，有

$$(\mathscr{A}\cdot \mathrm{ad}x\cdot \mathscr{A}^{-1})(y)=\mathscr{A}([x,\mathscr{A}^{-1}y])$$
$$=[\mathscr{A}x,y]=\mathrm{ad}\mathscr{A}x(y),$$

即(5)成立. ▌

定理 1.5.4 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数，又 $\mathrm{ch}F=0$. 若 $D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 且 D 是幂零的，则

$$\mathrm{e}^D=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}D^n \tag{6}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 令 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 为由 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}x}\mid \mathrm{ad}x$ 幂零$\}$生成的子群. 则 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的正规子群.

证 因为 D 幂零，故有 $N\in\boldsymbol{N}$，使得 $D^N=0$. 又 $\mathrm{ch}F=0$. 于是

$$\mathrm{e}^D=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}D^n=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}D^n\in\mathrm{gl}(\mathfrak{g}),$$

即(6)是有意义的.

设 $x,y\in\mathfrak{g}$，于是由(4)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^D([x,y])&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}D^k([x,y])=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\frac{1}{k!}C_k^s[D^sx,D^{k-s}y]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k}\left[\frac{1}{s!}D^sx,\ \frac{1}{(k-s)!}D^{k-s}y\right]\\&=\left[\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!}D^sx,\ \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{t!}D^ty\right]\\&=[\mathrm{e}^Dx,\mathrm{e}^Dy].\end{aligned}$$

因而 $\mathrm{e}^D\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$.

设 $\mathscr{A}\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$；$D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$，且幂零. 于是

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\mathrm{e}^D\mathscr{A}^{-1}&=\mathscr{A}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}D^k\right)\mathscr{A}^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathscr{A}D\mathscr{A}^{-1})^k\\&=\mathrm{e}^{\mathscr{A}D\mathscr{A}^{-1}}.\end{aligned}$$

特别，当 $\mathrm{ad}x$ 幂零时，由(5)有：

$$\mathscr{A}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}x}\mathscr{A}^{-1}=\mathrm{e}^{\mathscr{A}\mathrm{ad}x\mathscr{A}^{-1}}=\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\mathscr{A}x}.$$

由此知 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的正规子群. ▌

注 1 Int$\mathfrak{g}$ 中元素,称为 $\mathfrak{g}$ 的**内自同构**,Int$\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内自同构群**.

注 2 当 $F=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$,$\dim\mathfrak{g}<\infty$时, $\forall x\in\mathfrak{g}$,$e^{\mathrm{ad}x}$都是 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 且可以证明,$e^{\mathrm{ad}x}\in\mathrm{Int}\mathfrak{g}$,即 $e^{\mathrm{ad}x}$也是内自同构. 我们在此略去这个结论的证明.

对于线性李代数 $\mathfrak{g}\subseteq\mathrm{gl}(V)$,内导子的计算有较为简捷的方式. 设 $X\in\mathrm{gl}(V)$,定义 $\mathrm{gl}(V)$的两个线性变换 X_l,X_r 如下:

$$X_l(Y)=XY,\quad \forall Y\in\mathrm{gl}(V);$$
$$X_r(Y)=YX,\quad \forall Y\in\mathrm{gl}(V).$$

它们分别称为 X 的**左乘**与**右乘**.

显然,以下性质成立:

1) $X_lX_r=X_rX_l,\quad \forall X\in\mathrm{gl}(V)$;

2) $(XY)_l=X_lY_l,\quad \forall X,Y\in\mathrm{gl}(V)$;

3) $(XY)_r=Y_rX_r,\quad \forall X,Y\in\mathrm{gl}(V)$;

4) $\mathrm{ad}X=X_l-X_r,\quad \forall X\in\mathrm{gl}(V)$.

习 题

1. 设 $\mathscr{A}$,D 分别为李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构,导子. 试证

1) $\mathscr{A}D\mathscr{A}^{-1}$也是 $\mathfrak{g}$ 的导子; 2) $D(C(\mathfrak{g}))\subseteq C(\mathfrak{g})$;

3) $D(\mathfrak{g}^{(1)})\subseteq\mathfrak{g}^{(1)}$.

2. 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 上有限维李代数. 又 $x,y\in\mathfrak{g}$,$[x,y]=0$. 试证

$$e^{\mathrm{ad}x}e^{\mathrm{ad}y}=e^{\mathrm{ad}(x+y)}.$$

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{gl}(n,F)$的子代数. 试证

$$(\mathrm{ad}X)^kY=\sum_{s=0}^{k}(-1)^sC_k^sX^{k-s}YX^s.$$

4. 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{gl}(n,F)$($F=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$)的子代数. 试证

$$e^{\mathrm{ad}X}Y=e^XYe^{-X},\quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

5. 设 $\mathfrak{g}$ 为 2 维非交换李代数. 试证 $\mathfrak{g}$ 的所有导子均为内导子.

6. 设李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心为零. 试证 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的中心也是零.

§6 直和与扩张

定义 1.6.1 设 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_n$ 均为李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想,且 $\mathfrak{g}$ 有线性子空间的直和分解:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dotplus\mathfrak{g}_2\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_n, \tag{1}$$

则称 $\mathfrak{g}$ 是**理想** $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_n$ 的**直和**,记为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_n=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathfrak{g}_i. \tag{2}$$

此时,我们也称 $\mathfrak{g}$ 有**理想直和分解(2)**.

定理 1.6.1 设李代数 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解(2),则下述结果成立:

1) $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]=\{0\}$,当 $i\neq j$ 时;

2) 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的理想,则 $\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想;

3) 若 $\mathfrak{g}_i$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g}_i=\bigoplus_{j=1}^{m_i}\mathfrak{h}_{ij}, \tag{3}$$

则 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g}=\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{m_i}\mathfrak{h}_{ij}. \tag{4}$$

证 1) 由(2) 知 $i\neq j$ 时 $\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\{0\}$. 又 $\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j$ 均为理想,故 $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]\subseteq\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\{0\}$.

2) 设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}_i$ 的理想. 于是由 1),当 $j\neq i$ 时,$[\mathfrak{g}_j,\mathfrak{h}]\subseteq[\mathfrak{g}_j,\mathfrak{g}_i]=\{0\}$. 故

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]=[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h},$$

即 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想.

3) 由 2),$\mathfrak{h}_{ij}$是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 又由线性代数理论知 $\mathfrak{g}$ 有线性子空间直和分解

$$\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}\mathfrak{h}_{ij}.$$

于是 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解(4). ∎

例 1.6.1 设域 F 的特征 $\mathrm{ch}F \nmid n$,则 $\mathrm{gl}(n,F)$有理想直和分解:

$$\mathrm{gl}(n,F)=sl(n,F)\oplus FI_n. \tag{5}$$

由例 1.2.1 知 $sl(n,F)$是 $\mathrm{gl}(n,F)$的理想. 又$\forall A\in \mathrm{gl}(n,F)$, $\lambda\in F$有$[A,\lambda I_n]=0$,因而 FI_n 也是 $\mathrm{gl}(n,F)$的理想. 又 $\mathrm{tr}\lambda I_n=n\lambda$, 因而 $sl(n,F)\cap FI_n=\{0\}$. 设 $A\in \mathrm{gl}(n,F)$. 于是

$$A=\left(A-\left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}A\right)I_n\right)+\left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}A\right)I_n,$$

$$\mathrm{tr}\left(A-\left(\frac{1}{n}\mathrm{tr}A\right)I_n\right)=0.$$

由上面讨论知(5)成立.

定理 1.6.2 设 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 均为域 F 上的李代数, 则存在 F 上的李代数 $\mathfrak{g}$,满足

1) $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解(2);

2) $\mathfrak{g}_i$ 与 $\mathfrak{a}_i(i=1,2,\cdots,n)$同构.

证 作线性空间 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 的直和 $\mathfrak{g}$,即

$$\mathfrak{g}=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in\mathfrak{a}_i,\quad i=1,2,\cdots,n\}.$$

在 $\mathfrak{g}$ 中定义换位运算为

$$[(a_1,a_2,\cdots,a_n),(b_1,b_2,\cdots,b_n)]=([a_1,b_1],[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n]),$$

$$a_i,b_i\in\mathfrak{a}_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

容易验证 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数.

令

$$\mathfrak{g}_i=\{(0,\cdots,0,a_i,0,\cdots,0)\mid a_i\in\mathfrak{a}\},$$

则 $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 故 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解(2), 且 $\mathfrak{g}_i$ 与 $\mathfrak{a}_i$ 同构. ∎

李代数的直和概念是李代数扩张概念的一种特殊情形.

定义 1.6.2 设 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_k,\cdots$均为域 F 上的李代数. 又 f_i

是 $\mathfrak{g}_i$ 到 $\mathfrak{g}_{i+1}$的同态.如果

$$\mathrm{Ker} f_{i+1} = f_i(\mathfrak{g}_i), \quad i=1,2,\cdots,$$

则称序列

$$\mathfrak{g}_1 \xrightarrow{f_1} \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow \mathfrak{g}_i \xrightarrow{f_i} \mathfrak{g}_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

为**正合序列**.

定义 1.6.3 设 $\mathfrak{a}$,$\mathfrak{b}$ 与 $\mathfrak{g}$ 均为域 F 上的李代数. 若有 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{a}$ 同构,而商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ 与 $\mathfrak{b}$ 同构,则称 $\mathfrak{g}$ 是 **$\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的扩张**. $\mathfrak{n}$ 称为此**扩张的核**.

设 λ 是 $\mathfrak{a}$ 到 $\mathfrak{n}$ 的同构;μ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{b}$ 的满同态,使 $\mathrm{Ker}\mu=\mathfrak{n}$;又 i 是$\{0\}$到 $\mathfrak{a}$ 的映射 $i(0)=0$;0 是 $\mathfrak{b}$ 到$\{0\}$的零映射,$0(b)=0$, $\forall b\in \mathfrak{b}$,则序列

$$0 \xrightarrow{i} \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b} \xrightarrow{0} 0 \tag{6}$$

为正合序列. 反之上述序列为正合序列,则 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的扩张.

定理 1.6.3 设 $\mathfrak{g}$,$\mathfrak{g}'$,$\mathfrak{a}$,$\mathfrak{b}$ 都是域 F 上的李代数.

1) 若 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的扩张,$\mathfrak{g}'$与 $\mathfrak{g}$ 同构,则 $\mathfrak{g}'$也是 $\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的扩张.

2) 设 $\mathfrak{g}$,$\mathfrak{g}'$都是 $\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的扩张,且有 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}'$的同态 f 使得

$$\lambda' = f\circ\lambda, \quad \mu = \mu'\circ f,$$

或者说有可交换的同态图表:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{a} & \xrightarrow{\lambda} & \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{b} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
\mathfrak{a} & \xrightarrow{\lambda'} & \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\mu'} & \mathfrak{b}
\end{array}$$

则 f 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}'$的同构.

此时,称 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}'$为 $\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的**等价扩张**.

证 1) 设 f 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}'$的同构. 令

$$\lambda' = f\circ\lambda, \quad \mu' = \mu\circ f^{-1}.$$

由 λ, f 都是一一的，故 λ' 是一一的. 又 λ, f 都是李代数的同构，故 $\mathfrak{a}$ 与 $\lambda'(\mathfrak{a})=\mathfrak{n}_1$ 同构. 又 $\mu'(\mathfrak{g}')=\mu f^{-1}(\mathfrak{g}')=\mu(\mathfrak{g})=\mathfrak{b}$，故 $\mathfrak{b}$ 与 $\mathfrak{g}'$ 同态，且 $\mathrm{Ker}\mu'=f(\mathrm{Ker}\mu)=f(\lambda(\mathfrak{a}))=\mathfrak{n}_1$. 因而 $\mathfrak{g}'$ 是 $\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的扩张.

2) 设 $x\in\mathrm{Ker}f\subseteq\mathrm{Ker}\mu' f=\mathrm{Ker}\mu=\lambda(\mathfrak{a})$，故有 $y\in\mathfrak{a}$，使得 $x=\lambda(y)$. 因而 $\lambda'(y)=f(\lambda(y))=f(x)=0$. 由 $\mathrm{Ker}\lambda'=\{0\}$，故 $y=0$，$x=0$，即 $\mathrm{Ker}f=\{0\}$.

又 $\mu(\mathfrak{g})=\mu' f(\mathfrak{g})=\mathfrak{b}$，故 $f(\mathfrak{g})+\mathrm{Ker}\mu'=f(\mathfrak{a})+\lambda'(\mathfrak{a})=\mathfrak{g}'$. 又 $f(\mathfrak{g})\supseteq f(\lambda(\mathfrak{a}))=\lambda'(\mathfrak{a})$，故 $f(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}'$.

由此得到 f 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}'$ 的同构. ▍

定理 1.6.4 设李代数 $\mathfrak{g}$ 是李代数 $\mathfrak{b}$ 通过李代数 $\mathfrak{a}$ 的扩张，并有正合序列(6)，又 $\mathfrak{n}=\lambda(\mathfrak{a})=\mathrm{Ker}\mu$.

1) 若 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{m}$ 为 $\mathfrak{n}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补子空间，即 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}\dotplus\mathfrak{m}$，则 μ 在 $\mathfrak{m}$ 上的限制 $\mu|_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathfrak{m}$ 到 $\mathfrak{b}$ 的同构. 令 $\nu=(\mu|_{\mathfrak{m}})^{-1}$，则 ν 是 $\mathfrak{b}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的一个同态，且 $\mu\nu=\mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$.

2) 反之，若有 $\mathfrak{b}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的同态 ν，使得 $\mu\nu=\mathrm{id}_{\mathfrak{b}}$，则 $\nu(\mathfrak{b})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，且

$$\mathfrak{g}=\nu(\mathfrak{b})\dotplus\mathfrak{n}.$$

此定理的证明很容易，读者可作为练习. ▍

定义 1.6.4 设李代数 $\mathfrak{g}$ 是李代数 $\mathfrak{b}$ 通过李代数 $\mathfrak{a}$ 的扩张，$\mathfrak{n}$ 为扩张核. 如果有 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{m}$ 为 $\mathfrak{n}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的补子空间，则称此扩张为**非本质扩张**. 又若 $\mathfrak{m}$ 还是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则称此扩张为**平凡扩张**.

如果 $\mathfrak{n}\subseteq C(\mathfrak{g})$，则称此扩张为**中心扩张**.

实际上，平凡扩张就是理想的直和，即

$$\mathfrak{g}=m\oplus\mathfrak{n},$$

其中 $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ 分别与 $\mathfrak{b},\mathfrak{a}$ 同构.

定义 1.6.5 若李代数 $\mathfrak{g}$ 满足条件：$C(\mathfrak{g})=\{0\}$；$\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathrm{ad}\mathfrak{g}$，则称 $\mathfrak{g}$ 为**完备李代数**.

定理 1.6.5 设李代数 $\mathfrak{g}$ 是李代数 $\mathfrak{b}$ 通过完备李代数 $\mathfrak{a}$ 的扩张,则此扩张为平凡扩张.

证 不妨将 $\mathfrak{a}$ 与扩张核等同起来,即假定 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 同构. 由定理 1.2.1 知 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想,而且

$$\mathfrak{a}\cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})=C(\mathfrak{a})=\{0\}.$$

又 $\forall x\in\mathfrak{g},[x,\mathfrak{a}]\subseteq\mathfrak{a}$. 故知 $\mathrm{ad}x|_{\mathfrak{a}}\in\mathrm{Der}\mathfrak{a}=\mathrm{ad}\mathfrak{a}$, 即有 $x_1\in\mathfrak{a}$ 使得 $\mathrm{ad}x|_{\mathfrak{a}}=\mathrm{ad}x_1$. 于是有$[x-x_1,\mathfrak{a}]=0$, 即 $x-x_1\in C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. 故知

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}).$$

显然,$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 同构,因而与 $\mathfrak{b}$ 同构. 由此知 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的平凡扩张. ▌

定理 1.6.6 设 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的导子代数. 在 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的线性空间直和

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})=\mathrm{Der}\mathfrak{g}\dot{+}\mathfrak{g}=\{(D,x)\mid D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g},x\in\mathfrak{g}\}$$

中定义换位运算为

$$[(D_1,x_1),(D_2,x_2)]=([D_1,D_2],\ D_1x_2-D_2x_1+[x_1,x_2]),$$

则 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$为李代数,且为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 通过 $\mathfrak{g}$ 的非本质扩张. $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$称为 $\mathfrak{g}$ 的**全形**.

证 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$中的换位运算显然是双线性的,且$[(D,x),(D,x)]=0$, $\forall(D,x)\in\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$. 注意到

$$\begin{aligned}&[[(D_1,x_1),(D_2,x_2)],(D_3,x_3)]\\&\quad=([[D_1,D_2],D_3],[D_1,D_2]x_3-D_3D_1x_2+D_3D_2x_1-D_3[x_1,x_2]\\&\qquad\qquad+[D_1x_2,x_3]-[D_2x_1,x_3]+[[x_1,x_2],x_3]),\end{aligned}$$

其中 $D_3[x_1,x_2]=[D_3x_1,x_2]+[x_1,D_3x_2]$. 将下标 1,2,3 轮换为 2,3,1 与 3,1,2 可得另外二式. 再将三式相加,即可得 Jacobi 恒等式,故 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$为李代数. 显然 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$的理想$\{(0,x)\mid x\in\mathfrak{g}\}$同构,后者仍以 $\mathfrak{g}$ 表示. 而 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$的子代数$\{(D,0)\mid D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}\}$同构,后者仍以 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 表示. 则

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})=\mathrm{Der}\mathfrak{g}\dot{+}\mathfrak{g}.$$

故 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$是 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 通过 $\mathfrak{g}$ 的非本质扩张. ▌

最后，我们讨论一类特殊的中心扩张.

定义 1.6.6 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数，$\mathfrak{g}$ 上的双线性函数 ψ，如果满足：

1) $\psi(x,x)=0,\quad \forall x\in\mathfrak{g}$;

2) $\psi([x,y],z)+\psi([y,z],x)+\psi([z,x],y)=0, \forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.

则称 ψ 是 $\mathfrak{g}$ 的(F-值)**2-上循环**.

定理 1.6.7 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数，ψ 是 $\mathfrak{g}$ 上的 2-上循环. V 是 F 上的一维线性空间，$c\in V, c\neq 0$. 在线性空间

$$\hat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\dot{+}V=\{x+\lambda c\mid x\in\mathfrak{g},\lambda\in F\}$$

中定义换位运算$[\cdot,\cdot]_0$如下：

$$[x+\lambda c,y+\mu c]_0=[x,y]+\psi(x,y)c,\quad \forall x,y\in\mathfrak{g},\lambda,\mu\in F,$$

其中$[\cdot,\cdot]$是 $\mathfrak{g}$ 中的换位运算，则 $\hat{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 通过 V 的中心扩张.

证 由$[\cdot,\cdot]$与 ψ 都是双线性的，故$[\cdot,\cdot]_0$是双线性的. 又

$$[x+\lambda c,x+\lambda c]_0=[x,x]+\psi(x,x)c=0.$$

设 $x_1,x_2,x_3\in\mathfrak{g},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in F$，则

$$[[x_1+\lambda_1c,x_2+\lambda_2c]_0,x_3+\lambda_3c]_0=[[x_1,x_2],x_3]+\psi([x_1,x_2],x_3)c.$$

在此式中将下标 1,2,3 依次换为 2,3,1 与 3,1,2. 再将三式相加即得$[\cdot,\cdot]_0$满足 Jacobi 等式. 故 $\hat{\mathfrak{g}}$ 是李代数.

又 $\forall x\in\mathfrak{g},\lambda,\mu\in F$，有

$$[x+\lambda c,\mu c]_0=0,$$

故 $V\subseteq C(\hat{\mathfrak{g}})$.

设 π 为 $\hat{\mathfrak{g}}$ 到 $\hat{\mathfrak{g}}/V$ 的自然同态，则 $\pi(\hat{\mathfrak{g}})$与 $\mathfrak{g}$ 同构. 因而 $\hat{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 通过 V 的中心扩张. ▍

习　　题

1. 证明定理 1.6.4.

2. 证明二维非交换李代数是一维李代数通过一维李代数的非本质扩张，但不是平凡扩张.

3. 设李代数 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus \mathfrak{g}_2.$$

试证 $\mathfrak{g}$ 为完备李代数当且仅当 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ 为完备李代数.

4. 试证若李代数 $\mathfrak{g}$ 的全形 $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$有理想直和分解

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\oplus C_{\mathfrak{h}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g}),$$

则 $\mathfrak{g}$ 为完备李代数.

§7 模

在定义 1.3.4 中我们定义了李代数的表示. 现在表示论中,也常常以模论的语言来表述. 因而表示与模这两种表述方法经常同时使用.

定义 1.7.1 设 $\mathfrak{g},V$ 分别为域 F 上的李代数,线性空间. 若有 $\mathfrak{g}\times V$ 到 V 的映射:

$$(x,v)\to x\cdot v,\quad x\in\mathfrak{g},v\in V \tag{1}$$

满足

1) $x\cdot(k_1v_1+k_2v_2)=k_1x\cdot v_1+k_2x\cdot v_2$;

2) $(k_1x_1+k_2x_2)\cdot v=k_1x_1\cdot v+k_2x_2\cdot v$;

3) $[x_1,x_2]\cdot v=x_1\cdot(x_2\cdot v)-x_2\cdot(x_1\cdot v)$,

$$\forall k_1,k_2\in F,\quad x,x_1,x_2\in\mathfrak{g},\quad v,v_1,v_2\in V,$$

则称 V 是一个(左)**$\mathfrak{g}$-模**,也称 $\mathfrak{g}$ 作用在 V 上.

显然,若 V 是一个 $\mathfrak{g}$-模,$\forall x\in\mathfrak{g}$,存在唯一的 $\rho(x)\in\mathrm{gl}(V)$使得

$$\rho(x)v=x\cdot v,\quad \forall v\in V.$$

不难证明(ρ,V)是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示.

反之,若(ρ,V)是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示,定义

$$x\cdot v=\rho(x)v,\quad \forall x\in\mathfrak{g},v\in V,$$

则 V 是一个 $\mathfrak{g}$-模.

由此可以看出,$\mathfrak{g}$ 的表示与 $\mathfrak{g}$-模实质上是一回事. 我们以后

不加区别. $x \cdot v$ 也简记为 xv.

定义 1.7.2 设 $\mathfrak{g}$ 是李代数, V 是 $\mathfrak{g}$-模. 若 V 的子空间 V_1 满足 $x \cdot v \in V_1$, $\forall x \in \mathfrak{g}, v \in V_1$, 则称 V_1 是 V **子模**.

显然, V 的子模 V_1 也是一个 $\mathfrak{g}$-模. $\{0\}$, V 都是 V 的子模, 称为**平凡子模**. 如果非零 $\mathfrak{g}$-模 V 无非平凡子模, 则称 V 为**单 $\mathfrak{g}$-模**或**不可约 $\mathfrak{g}$-模**, 相应的表示称为**不可约表示**.

定义 1.7.3 若 V_1, V_2 都是 $\mathfrak{g}$-模 V 的子模, 而且

$$V = V_1 \dot{+} V_2,$$

则称 V 是子模 V_1, V_2 的**直和**, V_2 为 V_1 的**补子模**. 又若 V 的任一非平凡子模 V_1 均有补子模 V_2, 则称 V 是**完全可约模**.

特别, 单 $\mathfrak{g}$-模是完全可约模. 不难证明 $\mathfrak{g}$-模 V 是完全可约模当且仅当 V 可以分解为单子模的直和.

例 1.7.1 设 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上的李代数. 对于 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ 是一个 $\mathfrak{g}$-模, 称为**伴随模**. 显然, 伴随模的子模即为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 因而 $\mathfrak{g}$ 为单 $\mathfrak{g}$-模当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是单李代数或一维李代数.

2 维非交换李代数的伴随模是可约的, 但不是完全可约的.

定义 1.7.4 设 $\mathfrak{g}$ 是李代数. V, W 均为 $\mathfrak{g}$-模. 如果线性映射 $\phi: V \to W$ 满足

$$\phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v), \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V,$$

则称 ϕ 是 $\mathfrak{g}$-模 V 到 $\mathfrak{g}$-模 W 的**同态**或**缠结算子**.

如所周知, 从 V 到 W 的所有线性映射的集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 是一个线性空间. 而所有从 V 到 W 的模同态(缠结算子)集合 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$(或 $R(V, W)$)是 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 的子空间.

特别, $V = W$ 时, 记 $\mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{End}V (= \mathfrak{gl}(V))$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}V$, 则 $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}V$ 是结合代数 $\mathrm{End}V$ 的子代数.

定义 1.7.5 设 $\mathfrak{g}$ 为李代数, V, W 均为 $\mathfrak{g}$-模. 若 V 到 W 的模同态 ϕ 是可逆的, 则称为**模同构**. 此时称 V 与 W 为同构的 $\mathfrak{g}$-模. 相应的 $\mathfrak{g}$ 的两个表示称为**同构表示**.

显然, 模同构是 $\mathfrak{g}$-模间的等价关系.

下面定理 1.7.1 至定理 1.7.4 的证明都很简单,读者可作为练习.

定理 1.7.1 设 V_1 是 $\mathfrak{g}$-模 V 的子模,π 是 V 到商空间 V/V_1 的自然映射. 若定义 $\mathfrak{g}$ 在 V/V_1 上的作用为

$$x \cdot \pi(v) = \pi(x \cdot v), \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V, \tag{2}$$

则 V/V_1 是一个 $\mathfrak{g}$-模,称为 V 对 V_1 的**商模**,且 π 是 V 到 V/V_1 的模同态. ▌

定理 1.7.2 设 ϕ 是 $\mathfrak{g}$-模 V 到 $\mathfrak{g}$-模 W 的同态,则有下面结论:

1) $\phi(V)$是 W 的子模;

2) $\mathrm{Ker}\phi$ 是 V 的子模;

3) $V/\mathrm{Ker}\phi$ 与 $\phi(V)$是同构的 $\mathfrak{g}$-模. ▌

定理 1.7.3 设 ϕ 是 $\mathfrak{g}$-模 V 到 $\mathfrak{g}$-模 W 的满同态,则 W 的子模与 V 中包含 $\mathrm{Ker}\phi$ 的子模间有一一对应: $W_1 \to \phi^{-1}(W_1)$,且 $\phi^{-1}(W_1)/\mathrm{Ker}\phi$ 与 W_1 同构. ▌

推论 设 U,W 均为 $\mathfrak{g}$-模 V 的子模,而且满足 $U \subset W$,则 $\mathfrak{g}$-模 V/W 与 $\mathfrak{g}$-模$(V/U)/(W/U)$同构. ▌

定理 1.7.4 设 V_1,V_2 都是 $\mathfrak{g}$-模 V 的子模,则 V_1+V_2, $V_1 \cap V_2$也是 V 的子模,且 $\mathfrak{g}$-模 V_1+V_2/V_2 与 $\mathfrak{g}$-模 $V_1/V_1 \cap V_2$ 同构. ▌

下面我们讨论对偶模与模的张量积. 如所周知,若 V 是域 F 上的线性空间,则 $V^* = \mathrm{Hom}(V,F)$也是 F 上的线性空间,称为 V 的对偶空间.

定理 1.7.5 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数, V 是 $\mathfrak{g}$-模. 若 $x \in \mathfrak{g}$, $f \in V^*$,则由下式

$$(x \cdot f)(v) = -f(x \cdot v), \quad \forall v \in V \tag{3}$$

定义 $x \cdot f \in V^*$,且 $\mathfrak{g} \times V^*$到 V^*的映射$(x,f) \to x \cdot f$ 使 V^*成为 $\mathfrak{g}$-模,称为 V 的**对偶模**.

V 为单 $\mathfrak{g}$-模当且仅当 V^*为单 $\mathfrak{g}$-模.

证 设$k_1,k_2\in F$，$f,f_1,f_2\in V^*$，$x,x_1,x_2\in\mathfrak{g}$ 及 $v,v_1,v_2\in V$. 由 $x\cdot f$ 之定义，有

$$(x\cdot f)(k_1v_1+k_2v_2)=-f(x(k_1v_1+k_2v_2))$$
$$=k_1(x\cdot f)(v_1)+k_2(x\cdot f)(v_2),$$

即 $x\cdot f\in V^*$. 再由

$$(x\cdot(k_1f_1+k_2f_2))(v)=-(k_1f_1+k_2f_2)(x\cdot v)$$
$$=(k_1(x\cdot f_1)+k_2(x\cdot f_2))(v)$$

知

$$x\cdot(k_1f_1+k_2f_2)=k_1(x\cdot f_1)+k_2(x\cdot f_2).$$

又由

$$((k_1x_1+k_2x_2)\cdot f)(v)=-f((k_1x_1+k_2x_2)\cdot v)$$
$$=(k_1(x_1\cdot f)+k_2(x_2\cdot f))(v),$$

得

$$(k_1x_1+k_2x_2)\cdot f=k_1(x_1\cdot f)+k_2(x_2\cdot f).$$

最后，由

$$([x_1,x_2]\cdot f)(v)=-f([x_1,x_2]v)$$
$$=-f(x_1(x_2\cdot v)-x_2(x_1\cdot v))$$
$$=(x_1\cdot(x_2\cdot f)-x_2\cdot(x_1\cdot f))(v),$$

推出

$$[x_1,x_2]\cdot f=x_1\cdot(x_2\cdot f)-x_2\cdot(x_1\cdot f).$$

综上所述知 V^* 是 $\mathfrak{g}$-模.

设 V 是单 $\mathfrak{g}$-模. V_1^* 是 $\mathfrak{g}$-模 V^* 的子模. 令

$$V_1=\{v\in V\mid f_1(v)=0,\quad \forall f_1\in V_1^*\}.$$

显然，V_1 是 V 的子空间. 而且

$$f_1(x\cdot v)=-(x\cdot f_1)(v)=0,\quad \forall x\in\mathfrak{g},v\in V_1,f_1\in V_1^*.$$

即 $x\cdot v\in V_1$，$\forall x\in\mathfrak{g},v\in V_1$. 故 V_1 为 V 的子模. 由 V 是单 $\mathfrak{g}$-模，故 $V_1=V$ 或 $V_1=\{0\}$. 对应于这两种情形，分别有 $V_1^*=\{0\}$或 $V_1^*=V^*$，故 V^*是单 $\mathfrak{g}$-模.

反之,设 V^* 为单 $\mathfrak{g}$-模,V_1 为 V 的子模,则不难证明

$$V_1^* = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \quad \forall v \in V_1\}$$

是 V^* 的子模. 故 $V_1^* = V^*$ 或 $V_1^* = \{0\}$. 此时,对应地有 $V_1 = \{0\}$ 或 $V_1 = V$. 故 V 是单 $\mathfrak{g}$-模. ▌

设 V, W 均为域 F 上的线性空间,于是 V 与 W 的张量积 $V \otimes W$ 中元素均可表示为形如 $v \otimes w (v \in V, w \in W)$ 的元素之和,且

$$\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W.$$

定理 1.7.6 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数. V, W 均为 $\mathfrak{g}$-模,则在线性空间 $V \otimes W$ 上可定义 $\mathfrak{g}$-模结构,使得

$$x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w, \tag{4}$$

$$\forall x \in \mathfrak{g}, v \in V, w \in W.$$

证 由于 $V \otimes W$ 中元素可表示为 $\sum\limits_i v_i \otimes w_i$,其中 $v_i \in V$,$w_i \in W$. 设 $x \in \mathfrak{g}$. 定义

$$x \cdot \left(\sum_i v_i \otimes w_i\right) = \sum_i (x \cdot v_i \otimes w_i + v_i \otimes x \cdot w_i). \tag{5}$$

显然,x 是线性地作用在 $V \otimes W$ 上. 又对 $k_1, k_2 \in F$,$x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$,有

$$\begin{aligned}
&(k_1 x_1 + k_2 x_2) \cdot \left(\sum_i v_i \otimes w_i\right) \\
&\quad = k_1 \sum_i x_1 \cdot v_i \otimes w_i + k_1 \sum_i v_i \otimes x_1 \cdot w_i \\
&\qquad + k_2 \sum_i x_2 \cdot v_i \otimes w_i + k_2 \sum_i v_i \otimes x_2 \cdot w_i \\
&\quad = k_1 \left(x_1 \cdot \sum_i v_i \otimes w_i\right) + k_2 \left(x_2 \sum_i v_i \otimes w_i\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[x_1, x_2] \cdot \left(\sum_i v_i \otimes w_i\right) \\
&\quad = \sum_i (x_1 \cdot (x_2 \cdot v_i) - x_2 \cdot (x_1 \cdot v_i)) \otimes w_i \\
&\qquad + \sum_i v_i \otimes (x_1 \cdot (x_2 \cdot w_i) - x_2 \cdot (x_1 \cdot w_i)) \\
&\quad = x_1 \cdot \left(x_2 \cdot \left(\sum_i v_i \otimes w_i\right)\right) - x_2 \cdot \left(x_1 \cdot \left(\sum_i v_i \otimes w_i\right)\right).
\end{aligned}$$

因而 $V\otimes W$ 是一个 $\mathfrak{g}$-模. 由(5)知(4)成立. ▌

注 若 $\mathfrak{g}$-模 V,$\mathfrak{g}$-模 W 所对应的表示分别为(ρ,V),(ψ,W),则 V 的对偶模 V^* 所对应的表示记为(ρ^*,V^*)称为(ρ,V)的对偶表示. 而 $\mathfrak{g}$-模 $V\otimes W$ 对应的表示记为$(\rho\otimes\psi,V\otimes W)$,仍称为$(\rho,V)$与$(\psi,W)$的张量积. 注意,对 $x\in\mathfrak{g}$,有

$$(\rho\otimes\psi)(x)=\rho(x)\otimes \mathrm{id}_W+\mathrm{id}_V\otimes\psi(x).$$

定理 1.7.7 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数, V,W 均为 $\mathfrak{g}$-模. 定义 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{Hom}(V,W)$上的作用为

$$(x\cdot f)(v)=x\cdot(f(v))-f(x\cdot v), \tag{6}$$
$$\forall x\in\mathfrak{g}, f\in\mathrm{Hom}(V,W), v\in V,$$

则 $\mathrm{Hom}(V,W)$是一个 $\mathfrak{g}$-模.

证 由(6),可直接验证 $x\cdot f\in\mathrm{Hom}(V,W)$, $\forall x\in\mathfrak{g}, f\in\mathrm{Hom}(V,W)$及 x 线性地作用于 $\mathrm{Hom}(V,W)$上. 现设 $k_1,k_2\in F$, $x_1,x_2\in\mathfrak{g}, f\in\mathrm{Hom}(V,W), v\in V$. 由

$$\begin{aligned}
&((k_1x_1+k_2x_2)\cdot f)(v)\\
&\quad=(k_1x_1+k_2x_2)\cdot(f(v))-f((k_1x_1+k_2x_2)\cdot v)\\
&\quad=(k_1(x_1\cdot f)+k_2(x_2\cdot f))(v);\\
&([x_1,x_2]\cdot f)(v)=x_1(x_2(f(v)))-f(x_1(x_2v))\\
&\qquad\qquad -x_2(x_1(f(v)))+f(x_2(x_1v));
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
(x_1(x_2f))(v)&=x_1(x_2(f(v)))-x_1(f(x_2v))\\
&\quad+f(x_2(x_1v))-x_2(f(x_1v));\\
(x_2(x_1f))(v)&=x_2(x_1(f(v)))-x_2(f(x_1v))\\
&\quad+f(x_1(x_2v))-x_1(f(x_2v))
\end{aligned}$$

知

$$(k_1x_1+k_2x_2)\cdot f=k_1(x_1f)+k_2(x_2f),$$
$$[x_1,x_2]\cdot f=x_1(x_2f)-x_2(x_1f).$$

故 $\mathrm{Hom}(V,W)$是一个 $\mathfrak{g}$-模. ▌

推论 设 V 是一个 $\mathfrak{g}$-模,则 $\mathrm{End}V=\mathfrak{gl}(V)$有 $\mathfrak{g}$-模结构,使得

$$(x\cdot f)(v)=x(f(v))-f(x\cdot v),\quad x\in\mathfrak{g}, f\in\mathfrak{gl}(V), v\in V.$$

证 只要在定理 1.7.7 中取 $W=V$,即得此结论. ▌

若 V 与 W 都是单 $\mathfrak{g}$-模,一般说来 $V\otimes W$ 不一定是单 $\mathfrak{g}$-模. 这可从下面一个特殊情况看出.

定理 1.7.8 设 V 为 $\mathfrak{g}$-模,则在 $\mathfrak{g}$-模 $V\otimes V$ 中有对合自同构 θ,满足

$$\theta(v_1\otimes v_2)=v_2\otimes v_1,\quad \forall v_1,v_2\in V. \tag{7}$$

又设 $\mathrm{Sym}^2(V)=\{w\in V\otimes V\mid\theta(w)=w\}$, $\mathrm{Alt}^2(V)=\{w\in V\otimes V\mid \theta(w)=-w\}$,则 $V\otimes V$ 有子模直和分解

$$V\otimes V=\mathrm{Sym}^2(V)\dotplus\mathrm{Alt}^2(V). \tag{8}$$

证 $V\otimes V$ 中变换 θ:

$$\theta\Big(\sum_i v_i\otimes w_i\Big)=\sum_i w_i\otimes v_i,\quad v_i,w_i\in V$$

显然是线性的,且 $\theta^2=\mathrm{id}_{V\otimes V}$,即 θ 为对合的. 又由于 $\forall v_1,v_2\in V$, $x\in\mathfrak{g}$,有

$$\theta(x\cdot(v_1\otimes v_2))=\theta(x\cdot v_1\otimes v_2+v_1\otimes x\cdot v_2)=x\cdot(\theta(v_1\otimes v_2)).$$

于是 $\theta\in\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}V\otimes V$,即 θ 为 $\mathfrak{g}$-模 $V\otimes V$ 的对合自同构. 由于 $\theta^2=\mathrm{id}_{V\otimes V}$,故 $V\otimes V$ 有线性子空间分解(8). 特别,$\forall x\in\mathfrak{g}$,有

$$\theta(x\cdot w)=x\cdot(\theta w)=\begin{cases}x\cdot w, & \text{当 } w\in\mathrm{Sym}^2(V),\\ -x\cdot w, & \text{当 } w\in\mathrm{Alt}^2(V).\end{cases}$$

故 $\mathrm{Sym}^2(V)$, $\mathrm{Alt}^2(V)$均为 $V\otimes V$ 的子模. ▌

$\mathrm{Sym}^2(V)$称为 $\mathfrak{g}$-模 V 的**对称方**, $\mathrm{Alt}^2(V)$称为 $\mathfrak{g}$-模 V 的**交错方**. 我们知道 $\dim\mathrm{Sym}^2(V)=\dim V$,而 $\dim V\otimes V=(\dim V)^2$. 因而 $\dim V>1$ 时,$V\otimes V$ 不是单 $\mathfrak{g}$-模.

下面的 Schur 引理在表示论中是极其重要的.

定理 1.7.9(Schur 引理) 设 $\mathfrak{g}$ 为代数闭域 F 上的李代数,V 为单 $\mathfrak{g}$-模,则

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)=\{\lambda\,\mathrm{id}_V\mid\lambda\in F\}. \tag{9}$$

证 设 $\mathscr{A}\in\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V)$. 由于 F 为代数闭域,故 $\mathscr{A}$ 有特征值

λ,对应的特征子空间记为 $E_\lambda(\mathscr{A})$. 故 $E_\lambda(\mathscr{A})\neq\{0\}$. 又 $\forall x\in\mathfrak{g}$, $v\in E_\lambda(\mathscr{A})$,有

$$\mathscr{A}(x\cdot v)=x\cdot(\mathscr{A}v)=\lambda xv.$$

故 $x\cdot v\in E_\lambda(\mathscr{A})$,即 $E_\lambda(\mathscr{A})$为 V 的子模. 但 V 是单 $\mathfrak{g}$-模, 故 $E_\lambda(\mathscr{A})=V$,即 $\mathscr{A}=\lambda\,\mathrm{id}_V$. (9)成立. ▌

习　　题

1. 试证 $\mathfrak{g}$-模 V 完全可约当且仅当 V 可分解为单子模的直和.

2. 完成定理 1.7.1 至定理 1.7.4 的证明.

3. 设 V 为 $\mathfrak{g}$-模,V^*为其对偶模. 试求 V^*的对偶模$(V^*)^*$与 V 的关系.

4. 设 V,W 均为 $\mathfrak{g}$-模. 问 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$是否为 $\mathfrak{g}$-模 $\mathrm{Hom}(V,W)$的子模?

5. 设 V,W 均为 $\mathfrak{g}$-模. 证明 $\mathfrak{g}$-模 $\mathrm{Hom}(V,W)$与 $\mathfrak{g}$-模 $V^*\otimes W$ 同构.

6. 设 V 为 $\mathfrak{g}$-模. 试证 $\mathrm{Sym}^2(V)$与 V 是同构的 $\mathfrak{g}$-模.

第二章　半单李代数的判别

本章将开始讨论半单李代数的性质. 先讨论其较为一般的性质. 为此需要引进幂零和可解李代数的概念. 在微分几何学、物理学以及李群中, 半单李代数却通常用 Killing 型来刻画, 当然, 这些领域中的李代数的基域通常是特征为零的. 本章我们将使两者沟通.

§1　可解与幂零李代数

定义 2.1.1　设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数. $\mathfrak{g}$ 中理想序列

$$\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}], \cdots, \mathfrak{g}^{(k+1)}=[\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}], \cdots$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的**导代数序列**. 如果存在 $K\in N$, 使得

$$\mathfrak{g}^{(K)}=\{0\},$$

则称 $\mathfrak{g}$ 为**可解李代数**.

显然, 交换李代数为可解李代数. 从第一章 §4 知 $\mathfrak{t}(n,F)$ 为可解李代数.

定义 2.1.2　设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数. $\mathfrak{g}$ 中理想序列

$$\mathfrak{g}^{0}=\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{0}], \cdots, \mathfrak{g}^{k+1}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{k}], \cdots$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的**降中心序列**. 若有 $K\in N$, 使得

$$\mathfrak{g}^{K}=\{0\},$$

则称 $\mathfrak{g}$ 为**幂零李代数**.

显然, 交换李代数为幂零李代数. 从第一章 §4 知 $\mathfrak{n}(n,F)$ 为幂零李代数.

定义 2.1.3　设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数. 令

$$C_0(\mathfrak{g})=\{0\}, \quad C_1(\mathfrak{g})=C(\mathfrak{g}).$$

又设 π_1 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/C_1(\mathfrak{g})$ 的自然同态. 于是

$$C_2(\mathfrak{g})=\pi_1^{-1}(C(\mathfrak{g}/C_1(\mathfrak{g})))$$

为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 用此方法, 依次可得 $C_k(\mathfrak{g}), 1\leqslant k\leqslant p$. 设 π_p 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/C_p(\mathfrak{g})$ 的自然同态, 于是

$$C_{p+1}(\mathfrak{g})=\pi_p^{-1}(C(\mathfrak{g}/C_p(\mathfrak{g})))$$

为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 我们称 $\mathfrak{g}$ 中理想序列

$$\{0\}, C_1(\mathfrak{g}), \cdots, C_p(\mathfrak{g}), C_{p+1}(\mathfrak{g}), \cdots$$

为 $\mathfrak{g}$ 的**升中心序列**.

由上面三个定义, 易得下面一些性质:

1. $\mathfrak{g}^{(k)}\subseteq\mathfrak{g}^k$. 因而幂零李代数一定是可解李代数.

事实上, $\mathfrak{g}^{(0)}=\mathfrak{g}^0$. 若 $\mathfrak{g}^{(k)}\subseteq\mathfrak{g}^k$, 则

$$\mathfrak{g}^{(k+1)}=[\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^k]=\mathfrak{g}^{k+1}.$$

2. $\mathfrak{g}^{k-1}$ 是由 $\mathfrak{g}$ 中下列形式元素

$$[x_1,[x_2,\cdots,[x_{k-1},x_k]\cdots]],\quad x_i\in\mathfrak{g}, 1\leqslant i\leqslant k$$

生成的子空间.

3. 若 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 则 $\mathfrak{h}^{(k)}\subseteq\mathfrak{g}^{(k)}$, $\mathfrak{h}^k\subseteq\mathfrak{g}^k$. 因而可解李代数的子代数是可解的; 幂零李代数的子代数是幂零的.

4. 若 f 是李代数 $\mathfrak{g}$ 到李代数 $\mathfrak{h}$ 的满同态, 则

$$\mathfrak{h}^{(k)}=f(\mathfrak{g}^{(k)}),\quad \mathfrak{h}^k=f(\mathfrak{g}^k).$$

因而, 可解李代数的同态像(即商代数)是可解的; 幂零李代数的同态像(即商代数)是幂零的.

5. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的升中心序列满足:

$$C_{p+1}(\mathfrak{g})\supseteq C_p(\mathfrak{g}),\quad p=0,1,\cdots.$$

事实上, 由于 π_p 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/C_p(\mathfrak{g})$ 的自然同态, 故

$$C_p(\mathfrak{g})=\mathrm{Ker}\,\pi_p\subseteq\pi_p^{-1}(C(\mathfrak{g}/C_p(\mathfrak{g})))=C_{p+1}(\mathfrak{g}).$$

关于幂零李代数有下面一些结果.

定理 2.1.1 幂零李代数的中心扩张是幂零的. 幂零李代数的直和是幂零的.

证 首先, 设李代数 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数 $\mathfrak{b}$ 通过李代数 $\mathfrak{a}$ 的中心

扩张,即 $\mathfrak{a}\subseteq C(\mathfrak{g})$,$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 同构. 因而由 $\mathfrak{b}$ 幂零,有 $k\in N$,使得 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^k=\{0\}$,即 $\mathfrak{g}^k\subseteq\mathfrak{a}$. 又 $\mathfrak{a}\subseteq C(\mathfrak{g})$,故

$$\mathfrak{g}^{k+1}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^k]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{a}]=\{0\}.$$

这就证明了 $\mathfrak{g}$ 是幂零的.

其次,设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$. 容易证明下面式子:

$$\mathfrak{g}^k=\mathfrak{a}^k\oplus\mathfrak{b}^k.$$

由 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 幂零知 $\mathfrak{g}$ 幂零. ▍

定理 2.1.2 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上有限维李代数,则 $\mathfrak{g}$ 对于下面的条件是等价的:

1) $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数;

2) 存在 $k\in N$,使得

$$\mathrm{ad}x_1\mathrm{ad}x_2\cdots\mathrm{ad}x_k=0,\quad \forall x_i\in\mathfrak{g},1\leqslant i\leqslant k;$$

3) $\mathfrak{g}$ 中有理想序列

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_1\supset\mathfrak{g}_2\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_p=\{0\},$$

并满足

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i]\subseteq\mathfrak{g}_{i+1},\quad i=0,1,\cdots,p-1;$$

4) $\mathfrak{g}$ 中有满足条件 3)的理想序列,且

$$\dim\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}=1;$$

5) 存在 $k\in N$,使得 $C_k(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$.

证 由于 $\mathfrak{g}^k$ 是由形如

$$[x_1,[x_2,\cdots,[x_{k-1},x_k]\cdots]],\quad x_i\in\mathfrak{g}$$

的元素生成的子空间,故条件 1)与 2)等价.

1) $\Longrightarrow$ 3) 只要取 $\mathfrak{g}_k=\mathfrak{g}^k(k=0,1,\cdots)$,则知 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数时,条件 3)成立.

3) $\Longrightarrow$ 4) 设 $\mathfrak{g}$ 中理想序列 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_p=\{0\}$ 满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i]\subseteq\mathfrak{g}_{i+1}$. 若对某个 i,$\dim\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}>1$,则有 $\mathfrak{g}_i$ 的子空间 $\mathfrak{h}$,满足 $\mathfrak{g}_i\supset\mathfrak{h}\supset\mathfrak{g}_{i+1}$. 于是$[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subseteq[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i]\subseteq\mathfrak{g}_{i+1}\subseteq\mathfrak{h}$. 因而 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 而且在 $\mathfrak{g}_i$ 与 $\mathfrak{g}_{i+1}$之间添加 $\mathfrak{h}$ 之后所得的理想序列(称为原来序列的**加细**),仍满足条件 3). 由于 $\dim\mathfrak{g}<\infty$,故经过有限步加细之后所得

序列满足条件 4).

4) $\Longrightarrow$ 3) 满足条件 4)的序列自然满足条件 3).

3) $\Longrightarrow$ 5) 用归纳法证明,对于满足条件 3)的序列有 $\mathfrak{g}_{p-i}\subseteq C_i(\mathfrak{g})$. 显然,$i=0$ 时此式成立. 现假定 i 时成立. 对 $i+1$,我们有 $\pi_i([\mathfrak{g}_{p-i-1},\mathfrak{g}])\subseteq\pi_i(\mathfrak{g}_{p-i})\subseteq\pi_i(C_i(\mathfrak{g}))=\{0\}$. 故 $\pi_i(\mathfrak{g}_{p-i-1})\subseteq C(\pi_i(\mathfrak{g}))=C(\mathfrak{g}/C_i(\mathfrak{g}))$,即 $\mathfrak{g}_{p-i-1}\subseteq C_{i+1}(\mathfrak{g})$. 特别,$i=p$ 时,有 $C_p(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$,即条件 5)成立.

5) $\Longrightarrow$ 1) 若 $p=1$,则 $\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})$为交换李代数,故为幂零李代数. 故可假设 $p>1$. 显然 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$通过 $C(\mathfrak{g})$的中心扩张. 如果 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$是幂零的,则 $\mathfrak{g}$ 是幂零的. 而

$$C_1(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g})=\{0\},$$

$$C_2(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g})=\pi_1^{-1}(C(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})))/C(\mathfrak{g})=C_1(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})),$$

$$C_i(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g})=\pi_{i-1}^{-1}(C(\mathfrak{g}/C_{i-1}(\mathfrak{g})))/C(\mathfrak{g}).$$

注意到 $C_i(\mathfrak{g})/C_{i-1}(\mathfrak{g})$与$(C_i(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}))/(C_{i-1}(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g}))$同构,因而有 $C_i(\mathfrak{g})/C(\mathfrak{g})=C_{i-1}(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}))$. 由此可知 $C_{p-1}(\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}))=\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$. 故可由归纳法证明 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$是幂零李代数. 于是 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数. ▌

推论 非零的幂零李代数的中心非零. ▌

定理 2.1.3 设 $\mathfrak{h}$ 是幂零李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数,且 $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$,则 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\neq\mathfrak{h}$.

证 因为 $\mathfrak{g}$ 幂零,故有 p 使得

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^0\supset\mathfrak{g}^1\supset\cdots\supset\mathfrak{g}^p=\{0\}.$$

而 $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{g}$,故有 $k\geqslant0$,使得

$$\mathfrak{g}^k+\mathfrak{h}\neq\mathfrak{h},\quad \mathfrak{h}+\mathfrak{g}^{k+1}=\mathfrak{h}.$$

于是

$$[\mathfrak{g}^k+\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{g}^{k+1}+\mathfrak{h}=\mathfrak{h},$$

即

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\supseteq\mathfrak{g}^k+\mathfrak{h}\neq\mathfrak{h}.\quad ▌$$

关于可解李代数有下面一些结果.

定理 2.1.4 可解李代数通过可解李代数的扩张是可解李代数.

证 设 $\mathfrak{a}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的可解理想. $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是可解李代数. 又设 π 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 的自然同态. 因而有 k_1,k_2 使得$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^{(k_1)}=\{0\}$,$\mathfrak{a}^{(k_2)}=\{0\}$,即有 $\pi(\mathfrak{g}^{(k_1)})=\{0\}$. 换言之,$\mathfrak{g}^{(k_1)}\subseteq\mathfrak{a}$. 故 $\mathfrak{g}^{(k_1+k_2)}=\{0\}$. 因而 $\mathfrak{g}$ 可解.

推论 李代数 $\mathfrak{g}$ 可解(或幂零)的充分必要条件是 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 可解(或幂零).

证 因为 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$同构. 故 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 通过 $C(\mathfrak{g})$的中心扩张. 于是此推论成立. ▌

这个推论说明,抽象李代数的可解性与幂零性的研究归结为线性李代数($\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 是线性李代数)的可解性与幂零性的研究.

定理 2.1.5 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的有限维李代数,则 $\mathfrak{g}$ 对于下面条件是等价的:

1) $\mathfrak{g}$ 是可解李代数;

2) $\mathfrak{g}$ 中有理想序列

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\supset\mathfrak{g}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_n=\{0\}$$

使得 $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$是交换李代数;

3) $\mathfrak{g}$ 中有子代数序列

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_0\supset\mathfrak{h}_1\supset\cdots\mathfrak{h}_p=\{0\}$$

使得 $\mathfrak{h}_{i+1}$是 $\mathfrak{h}_i$ 的理想,且 $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$是交换李代数;

4) $\mathfrak{g}$ 中有子代数序列

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}_0\supset\mathfrak{k}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{k}_m=\{0\}$$

使得 $\mathfrak{k}_{i+1}$是 $\mathfrak{k}_i$ 的理想,且 $\dim\mathfrak{k}_i/\mathfrak{k}_{i+1}=1$.

证 1) $\Longrightarrow$ 2) 令 $\mathfrak{g}_i=\mathfrak{g}^{(i)}$. 由 $\mathfrak{g}^{(i+1)}=(\mathfrak{g}^{(i)})^{(1)}$. 故由定理 1.2.3 知 $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$是交换李代数. 故 2)成立.

2) $\Longrightarrow$ 3) 取 $\mathfrak{h}_i=\mathfrak{g}_i$ 即可.

3) $\Longrightarrow$ 4) 若 $\dim\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}>1$,于是有 $\mathfrak{h}_i$ 的子空间 $\mathfrak{k}$ 满足 $\mathfrak{h}_i\supset\mathfrak{k}$

$\supset \mathfrak{h}_{i+1}$，由 $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ 可交换，即有

$$[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{k}]\subseteq[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{h}_i]\subseteq\mathfrak{h}_{i+1}\subseteq\mathfrak{k},$$

$$[\mathfrak{h}_{i+1},\mathfrak{k}]\subseteq[\mathfrak{h}_i,\mathfrak{h}_{i+1}]\subseteq\mathfrak{h}_{i+1}.$$

因 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{h}_i$ 的理想，$\mathfrak{h}_{i+1}$ 是 $\mathfrak{k}$ 的理想. 显然 $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{k}$，$\mathfrak{k}/\mathfrak{h}_{i+1}$ 仍为交换李代数. 于是在 $\mathfrak{h}_i$ 与 $\mathfrak{h}_{i+1}$ 之间添加 $\mathfrak{k}$ 后所得的子代数序列(称为原序列的加细)仍满足条件 3). 故经过有限步添加之后可得到满足条件 4)的序列.

4) $\Longrightarrow$ 1) 由于 $\dim\mathfrak{k}_i/\mathfrak{k}_{i+1}=\dim\mathfrak{k}_{m-1}=1$，因而 $\mathfrak{k}_i/\mathfrak{k}_{i+1}$，$\mathfrak{k}_{m-1}$ 都是可解李代数. 由于 $\mathfrak{k}_i$ 是 $\mathfrak{k}_i/\mathfrak{k}_{i+1}$ 通过 $\mathfrak{k}_{i+1}$ 的扩张. 于是由定理 2.1.4 知 $\mathfrak{k}_{m-2},\mathfrak{k}_{m-3},\cdots,\mathfrak{k}_0=\mathfrak{g}$ 均为可解李代数. ▌

定理 2.1.6 李代数 $\mathfrak{g}$ 对于下面条件等价：

1) $\mathfrak{g}$ 为半单李代数；

2) $\mathfrak{g}$ 不包含非零的可解理想；

3) $\mathfrak{g}$ 不包含非零的幂零理想.

证 1) $\Longrightarrow$ 3) 设 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的可解理想. 于是 $\mathfrak{a}^{(i)}=[\mathfrak{a}^{(i-1)},\mathfrak{a}^{(i-1)}]$ $(i=0,1,\cdots)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 若 $\mathfrak{a}\neq\{0\}$，则有 $k\in\boldsymbol{N}$，使 $\mathfrak{a}^{(k-1)}\neq\{0\}$，$\mathfrak{a}^{(k)}=\{0\}$. 故 $\mathfrak{a}^{(k-1)}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的非零交换李理想. 由此可知条件 1) 推出条件 2).

2) $\Longrightarrow$ 3) 因为幂零李代数是可解李代数，故条件 2) 导出条件 3).

3) $\Longrightarrow$ 1) 因为交换李代数是幂零李代数，故条件 1) 可由条件 3) 得到. ▌

定理 2.1.7 设 $\mathfrak{g}$ 为有限维李代数，则

1) $\mathfrak{g}$ 中存在唯一的可解理想 $\mathfrak{r}$ 包含 $\mathfrak{g}$ 的任何可解理想. $\mathfrak{r}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**根基**，记为 $\mathrm{Rad}\mathfrak{g}$；

2) 当 $\mathfrak{g}$ 不可解时，$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单李代数；

3) $\mathfrak{g}$ 为半单李代数当且仅当 $\mathfrak{r}=\{0\}$.

证 1) 设 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 中维数最大的可解理想. 又设 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的任一可解理想. 于是 $\mathfrak{a}+\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，且由 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{r})/\mathfrak{r}$ 同构于 $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}$，

知$\mathfrak{a}+\mathfrak{r}$是可解李代数$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}$通过可解李代数$\mathfrak{r}$的扩张,故可解.由$\mathfrak{r}$的选取知$\dim(\mathfrak{a}+\mathfrak{r})\leqslant\dim\mathfrak{r}$.于是$\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{r}$.$\mathfrak{r}$的唯一性是显然的.

2) 设π为$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$的自然同态.又设$\bar{\mathfrak{a}}$为$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$的可解理想.于是$\mathfrak{a}=\pi^{-1}(\bar{\mathfrak{a}})$为$\mathfrak{g}$的理想,且$\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{r}$,$\mathfrak{a}/\mathfrak{r}=\bar{\mathfrak{a}}$.故$\mathfrak{a}$是$\mathfrak{g}$的可解理想.于是$\mathfrak{a}=\mathfrak{r}$,即$\bar{\mathfrak{a}}=\{0\}$.故$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$是半单的.

3) 这是定理 2.1.6 的直接结果. ▌

习　题

1. 举例说明幂零李代数通过幂零李代数的扩张不一定是幂零李代数.

2. 设$C_0(\mathfrak{g})\subseteq C_1(\mathfrak{g})\subseteq\cdots$为李代数$\mathfrak{g}$的升中心序列.证明

$$[\mathfrak{g},C_{i+1}(\mathfrak{g})]\subseteq C_i(\mathfrak{g}),\quad i=0,1,\cdots.$$

3. 设李代数$\mathfrak{g}$中理想序列

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_1\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_i\supset\mathfrak{g}_{i+1}\supset\cdots$$

满足$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i]\subseteq\mathfrak{g}_{i+1}$.试证

$$\mathfrak{g}_i\supseteq\mathfrak{g}^i,\quad i=0,1,\cdots.$$

4. 设域F的特征为 2.试证$sl(2,F)$是幂零李代数.

5. 设$\mathfrak{a},\mathfrak{b}$都是李代数$\mathfrak{g}$的幂零理想.试证$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$也是$\mathfrak{g}$的幂零理想.

6. 设$\mathfrak{g}$是有限维李代数.试证$\mathfrak{g}$中存在唯一的幂零理想$\mathfrak{n}$包含$\mathfrak{g}$的任何幂零理想.$\mathfrak{n}$称为$\mathfrak{g}$的**幂零根基**.

7. 以$\mathfrak{n}$表示李代数$\mathfrak{g}$的幂零根基.举例说明李代数$\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$的幂零根基不一定是零.

8. 若$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$,则$\mathrm{Rad}\mathfrak{g}=\mathrm{Rad}\mathfrak{g}_1\oplus\mathrm{Rad}\mathfrak{g}_2$.

§2　Jordan-Chevalley 分解

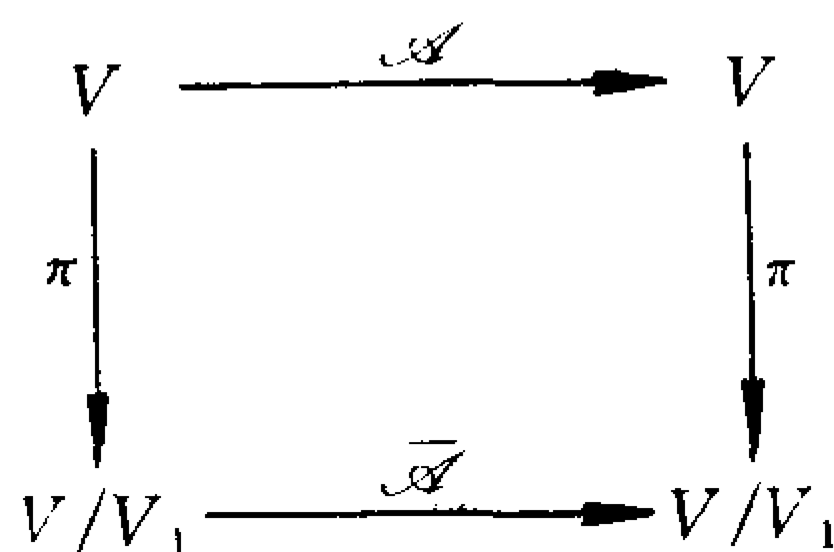
上节我们看到一般李代数的可解性与幂零性归结为线性李代

数的可解性与幂零性. 因而我们需要线性变换若干较为深刻的性质.

设 $\mathscr{A}$ 是复数域 C 上 n 维线性空间 V 的线性变换. V_1 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. $\mathscr{A}$ 在 V_1 上的限制 $\mathscr{A}|_{V_1}$是 V_1 的线性变换. π 是 V 到商空间 V/V_1 的自然同态. 则 $\mathscr{A}$ 在 V/V_1 上诱导一个线性变换 $\bar{\mathscr{A}}$满足

$$\bar{\mathscr{A}} \circ \pi = \pi \circ \mathscr{A},$$

即右面的同态图是交换的.



在不混淆时,我们也以 $\mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{A}|_{V_1}$与 $\bar{\mathscr{A}}$.

由此性质,我们可在 V 中找到一组基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵 $M_{\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}}(\mathscr{A})$ 为上三角矩阵.

事实上,设 λ_1 为 $\mathscr{A}$ 的一个特征值,v_1 是属于 λ_1 的特征向量. 于是 v_1 生成的子空间 $V_1=L(v_1)$是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 故 V/V_1 的线性变换 $\mathscr{A}$ 有特征值 λ_2 与对应的特征向量 v_2+V_1. 显然 $V_2=L(v_1,v_2)$也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间. 故 V/V_2 的线性变换 $\mathscr{A}$ 有特征值 λ_3 与对应的特征向量 $v_3+V_2,\cdots$,有限步后,即可得到 V 的一组基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 满足

$$\mathscr{A}(v_i)-\lambda_i v_i \in L(v_1,v_2,\cdots,v_{i-1}), \quad i\geqslant 2;$$

$$\mathscr{A}(v_1)-\lambda_1 v_1=0.$$

因而 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为上三角矩阵.

从线性代数理论知,V 中子集

$$V_\lambda(\mathscr{A})=\{v\in V \mid (\mathscr{A}-\lambda\ \mathrm{id}_V)^k v=0, \quad k\in \boldsymbol{N}\}$$

是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间,称为 $\mathscr{A}$ 的属于 λ 的**根子空间**. $V_\lambda(\mathscr{A})\neq\{0\}$当且仅当 λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值. 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 $\mathscr{A}$ 的不同的特征值,则 $\mathscr{A}$ 的最低多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}.$$

V 有子空间直和分解：

$$V=V_{\lambda_1}(\mathscr{A})\dotplus V_{\lambda_2}(\mathscr{A})\dotplus\cdots\dotplus V_{\lambda_s}(\mathscr{A}),$$

且
$$V_{\lambda_i}(\mathscr{A})=\{v\in V\mid(\mathscr{A}-\lambda_i\mathrm{id})^{k_i}v=0\}.$$

定义 2.2.1 设 $\mathscr{A}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换. 若有 $k\in\boldsymbol{N}$ 使得 $\mathscr{A}^k=0$，则称 $\mathscr{A}$ 是**幂零的**. 若 $\mathscr{A}$ 的最低多项式无重根，则称 $\mathscr{A}$ 是**半单的**.

显然，$\mathscr{A}$ 是幂零的当且仅当 $\mathscr{A}$ 的特征值全为零. $\mathscr{A}$ 是半单的当且仅当 $\mathscr{A}$ 可对角化，当且仅当 $\mathscr{A}$ 的(非零)根子空间都是特征子空间，当且仅当 $\mathscr{A}$ 的任一不变子空间都有不变补子空间.

定理 2.2.1 设 $\mathscr{A}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上 m 维线性空间 V 的线性变换，则有下面结果：

1) 存在唯一的一对线性变换 $\mathscr{A}_s,\mathscr{A}_n$ 满足：$\mathscr{A}_s,\mathscr{A}_n$ 分别为半单、幂零线性变换；$\mathscr{A}_s\mathscr{A}_n$ 交换；$\mathscr{A}=\mathscr{A}_s+\mathscr{A}_n$；

2) 存在 $\boldsymbol{C}$ 上多项式 $p(\lambda),q(\lambda)$ 使得 $\mathscr{A}_s=p(\mathscr{A}),\mathscr{A}_n=q(\mathscr{A})$.

证 设 $\mathscr{A}$ 的最低多项式为

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}.$$

令

$$f_i(\lambda)=\prod_{j\neq i}(\lambda-\lambda_j)^{k_j},$$

于是有 $(\lambda-\lambda_j)^{k_j}\mid f_i(\lambda),i\neq j$；$((\lambda-\lambda_i)^{k_i},f_i(\lambda))=1$. 因而有 $g_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,s)$ 使得

$$f_i(\lambda)g_i(\lambda)\equiv1\ (\mathrm{mod}(\lambda-\lambda_i)^{k_i}),\quad 1\leqslant i\leqslant s.$$

令

$$p(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i f_i(\lambda)g_i(\lambda),\quad q(\lambda)=\lambda-p(\lambda),$$

故 $\forall i$，我们有

$$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}\mid p(\lambda)-\lambda_i.$$

又设 V 对 $\mathscr{A}$ 的根子空间分解为

$$V=V_{\lambda_1}(\mathscr{A})\dot{+}V_{\lambda_2}(\mathscr{A})\dot{+}\cdots\dot{+}V_{\lambda_s}(\mathscr{A}).$$

显然，$\mathscr{A}_s=p(\mathscr{A})$，$\mathscr{A}_n=q(\mathscr{A})$保持 $V_{\lambda_i}(\mathscr{A})$不变，且

$$(\mathscr{A}_s-\lambda_i\,\mathrm{id})V_{\lambda_i}(\mathscr{A})=0 \quad 即 \quad \mathscr{A}_s\Big|_{V_{\lambda_i}(\mathscr{A})}=\lambda_i\,\mathrm{id}_{V_{\lambda_i}(\mathscr{A})}.$$

故 $\mathscr{A}_s$ 是半单的. 又由 $\mathscr{A}_n^{k_i}V_{\lambda_i}(\mathscr{A})=(\mathscr{A}-p(\mathscr{A}))^{k_i}V_{\lambda_i}(\mathscr{A})=(\mathscr{A}-\lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i}V_{\lambda_i}(\mathscr{A})=0$，即 $\mathscr{A}_n$ 在 $V_{\lambda_i}(\mathscr{A})$上的限制是幂零的，故$\mathscr{A}_n$ 是幂零的. 显然

$$\mathscr{A}_s\mathscr{A}_n=\mathscr{A}_n\mathscr{A}_s,\quad \mathscr{A}=\mathscr{A}_s+\mathscr{A}_n.$$

设半单、幂零线性变换 $\mathscr{A}_s'$，$\mathscr{A}_n'$满足条件：$\mathscr{A}_s'\mathscr{A}_n'=\mathscr{A}_n'\mathscr{A}_s'$，$\mathscr{A}=A_s'+\mathscr{A}_n'$. 自然，$\mathscr{A}_s'$，$\mathscr{A}_n'$与 $\mathscr{A}$ 交换，因而与 $\mathscr{A}_s$，$\mathscr{A}_n$ 交换. 故 $\mathscr{A}_s-\mathscr{A}_s'=\mathscr{A}_n'-\mathscr{A}_n$ 既为半单又为幂零线性变换，故为零，即 $\mathscr{A}_s'=\mathscr{A}_s$，$\mathscr{A}_n'=\mathscr{A}_n$. ▌

注 1 定义 2.2.1 与定理 2.2.1 可以推广到任意域上的有限维线性空间.

注 2 对于定理 2.2.1 中的 $p(\lambda)$，$q(\lambda)$还可以要求 $\lambda\mid p(\lambda)$，$\lambda\mid q(\lambda)$.

注 3 $\mathscr{A}_s$，$\mathscr{A}_n$ 分别称为 $\mathscr{A}$ 的**半单部分**，**幂零部分**. $\mathscr{A}=\mathscr{A}_s+\mathscr{A}_n$ 称为 $\mathscr{A}$ 的 **Jordan-Chevalley 分解**.

定理 2.2.2 设 V 是线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 的幂零线性变换，则 $\mathrm{ad}\mathscr{A}$ 是 $\mathrm{gl}(V)$的幂零线性变换.

证 由第一章 §5 知 $\mathrm{ad}\mathscr{A}=\mathscr{A}_l-\mathscr{A}_r$，$\mathscr{A}_l\mathscr{A}_r=\mathscr{A}_r\mathscr{A}_l$. 于是有

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}\mathscr{A})^k &= \sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}C_k^s(\mathscr{A}_l)^s(\mathscr{A}_r)^{k-s}\\ &= \sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}C_k^s(\mathscr{A}^s)_l(\mathscr{A}^{k-s})_r.\end{aligned}$$

故 k 充分大时，$(\mathrm{ad}\mathscr{A})^k=0$. ▌

定理 2.2.3 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上有限维李代数；$D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}$ 对 D 的

根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{\lambda_1}(D)\dotplus\mathfrak{g}_{\lambda_2}(D)\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_{\lambda_s}(D),$$

则有下面的结果：

1）$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D),\mathfrak{g}_{\lambda_j}(D)]\subseteq\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}(D)$；

2）若 D_s,D_n 分别为 D 的半单部分，幂零部分，则 $D_s,D_n\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$；

3）若 $\mathfrak{g}$ 为完备李代数，$\forall x\in\mathfrak{g}$，存在唯一的一对 $x_s,x_n\in\mathfrak{g}$ 使得 $\mathrm{ad}x_s,\mathrm{ad}x_n$ 分别是半单的，幂零的；$[x_s,x_n]=0$；$x=x_s+x_n$.

证 1）设有 $k_i,k_j\in N$ 使得

$$(D-\lambda_i\,\mathrm{id})^{k_i}\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)=(D-\lambda_j\,\mathrm{id})^{k_j}\mathfrak{g}_{\lambda_j}(D)=0,$$

于是由定理 1.5.2 知

$$\begin{aligned}&(D-(\lambda_i+\lambda_j)\mathrm{id})^k([x,y])\\&\quad=\sum_{s=0}^{k}C_k^s[(D-\lambda_i\,\mathrm{id})^s x,(D-\lambda_j\,\mathrm{id})^{k-s}y]=0,\\&\quad k\geqslant k_i+k_j,\quad\forall\,x\in\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D),y\in\mathfrak{g}_{\lambda_j}(D).\end{aligned}$$

故知$[\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D),\mathfrak{g}_{\lambda_j}(D)]\subseteq\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}(D)$.

2）设 $x\in\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D),y\in\mathfrak{g}_{\lambda_j}(D)$. 于是由结论 1)及定理 2.2.1 知

$$\begin{aligned}D_s([x,y])&=(\lambda_i+\lambda_j)[x,y]=[\lambda_i x,y]+[x,\lambda_j y]\\&=[D_s x,y]+[x,D_s y].\end{aligned}$$

对于 $x,y\in\mathfrak{g}$，有 $x=\sum\limits_i x_i,y=\sum\limits_i y_i,x_i,y_i\in\mathfrak{g}_{\lambda_i}(D)$，于是

$$\begin{aligned}D_s([x,y])&=\sum_{i,j}D_s([x_i,y_j])\\&=\sum_{i,j}([D_s x_i,y_j]+[x_i,D_s y_j])\\&=[D_s x,y]+[x,D_s y],\end{aligned}$$

故 $D_s\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 于是 $D_n=D-D_s\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$.

3）设 $x\in\mathfrak{g}$，于是 $\mathrm{ad}x\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 由结论 2)知$(\mathrm{ad}x)_s,(\mathrm{ad}x)_n\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 因为 $\mathfrak{g}$ 是完备李代数，故有唯一的 x_s,x_n 使得

$$(\mathrm{ad}x)_s=\mathrm{ad}x_s,\quad(\mathrm{ad}x)_n=\mathrm{ad}x_n.$$

由 $\mathrm{ad}x=(\mathrm{ad}x)_s+(\mathrm{ad}x)_n$ 知 $x=x_s+x_n$；由 $[(\mathrm{ad}x)_s,(\mathrm{ad}x)_n]=0$ 知 $[x_s,x_n]=0$. ▌

注 结论 3)中所得到的 x_s,x_n 分别称为 x 的**半单部分，幂零部分**. $\mathfrak{g}$ 中元素 x 称为**半单元素**或**幂零元素**，若 $\mathrm{ad}x$ 是半单的或幂零的. 分解 $x=x_s+x_n$ 称为 x 的 **Jordan-Chevalley 分解**.

习 题

1. 设 $\mathscr{A}\in \mathrm{gl}(V)$，$V$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上有限维线性空间. $\mathscr{A}=\mathscr{A}_s+\mathscr{A}_n$ 是 $\mathscr{A}$ 的 Jordan-Chevalley 分解. 试证存在 $\boldsymbol{C}$ 上多项式 $p(\lambda)$ 使得：$\lambda\mid p(\lambda)$；$p(\mathscr{A})=\mathscr{A}_s$.

2. 设 V 是 $\boldsymbol{C}$ 上有限维线性空间. V_1,V_2 是 V 的子空间，且 $V_1\subset V_2$，又 $\mathscr{A}\in \mathrm{gl}(V)$，使得 $\mathscr{A}V_2\subseteq V_1$. 试证 $\mathscr{A}_sV_2\subseteq V_1$，$\mathscr{A}_nV_2\subset V_1$.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上有限维李代数. 若 $\forall x\in\mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}x$ 是半单的，则称 $\mathfrak{g}$ 为**环面代数**. 试证环面代数是交换李代数.

§ 3 Engel 定理与 Lie 定理

定理 2.3.1(Engel) 设 V 为复数域 $\boldsymbol{C}$ 上 n 维线性空间. $\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{gl}(V)$的子代数，其中任何元素均为幂零线性变换，则 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数.

证 若能在 V 中找到一组基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 使得 $\mathfrak{g}$ 中任一元素 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵 $M(\mathscr{A})$ 均为严格上三角矩阵，即 $i\geqslant j$ 时，$\mathrm{ent}_{ij}M(\mathscr{A})=0$，则 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{n}(n,F)$的一个子代数同构，故为幂零李代数. 显然，$\dim V=1$ 时，$v\neq 0$ 即为所求. 一般，此基中 v_1 满足

$$\mathscr{A}v_1=0,\quad \forall \mathscr{A}\in\mathfrak{g}. \tag{1}$$

反之，如确能找到 $v_1\neq 0$ 满足(1)，设 $\bar{\mathscr{A}}$ 为 $\mathscr{A}$ 在商空间 $V/L(v_1)$ 上诱导的线性变换，则 $\bar{\mathscr{A}}$ 为幂零线性变换，$\bar{\mathfrak{g}}=$

$\{\bar{\mathscr{A}} \mid \mathscr{A} \in \mathfrak{g}\}$为$\mathrm{gl}(V/L(v_1))$的子代数. 而$\dim V/L(v_1)=\dim V-1$. 故对$V$的维数用归纳法即可知$v_1, v_2, \cdots, v_n$的存在性.

因而 Engel 定理证明的关键在于证明v_1的存在性. $\dim\mathfrak{g}=1$时,这是自不待言的. 现对$\mathfrak{g}$的维数用归纳法来证明这一事实. 设$\mathfrak{h}$为$\mathfrak{g}$的真子代数. 于是$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}=\{\mathrm{ad}\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \in \mathfrak{h}\} \subseteq \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$,而且$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$有不变子空间$\mathfrak{h}$. 以$\sigma(\mathscr{A})$表示$\mathrm{ad}\mathscr{A}$在商空间$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$上的诱导,记$\sigma(\mathfrak{h})=\{\sigma(\mathscr{A}) \mid \mathscr{A} \in \mathfrak{h}\}$. 因而$\sigma$是$\mathfrak{h}$到$\sigma(\mathfrak{h})$的满同态. 由$\mathscr{A}$是幂零的,故$\sigma(\mathscr{A})$也是幂零的. 由$\dim\sigma(\mathfrak{h}) \leqslant \dim\mathfrak{h} < \dim\mathfrak{g}$. 故有$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$中的非零向量$\mathscr{B}+\mathfrak{h}$,使得

$$\sigma(\mathscr{A})(\mathscr{B}+\mathfrak{h})=\mathfrak{h}, \quad \forall \mathscr{A} \in \mathfrak{h},$$

即$[\mathscr{A}, \mathscr{B}] \in \mathfrak{h}$, $\forall \mathscr{A} \in \mathfrak{h}$,而$\mathscr{B} \bar{\in} \mathfrak{h}$. 于是$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \supset \mathfrak{h}$.

由此可知,如果$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的极大真子代数,则$\mathfrak{h}$为$\mathfrak{g}$的理想. 但$\mathfrak{h}+L(\mathscr{B})$是$\mathfrak{g}$的子代数. 由$\mathfrak{h}$的极大性知

$$\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{g}-1, \mathfrak{g}=\mathfrak{h} \dotplus L(\mathscr{B}).$$

由归纳假设知V的子空间

$$W=\{v \in V \mid \mathscr{A}v=0, \forall \mathscr{A} \in \mathfrak{h}\} \neq \{0\}.$$

又设$v \in W$, $\mathscr{A} \in \mathfrak{h}$,我们有$[\mathscr{A}, \mathscr{B}] \in \mathfrak{h}$,于是

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}v)=[\mathscr{A}, \mathscr{B}]v+\mathscr{B}(\mathscr{A}v)=0,$$

即W是$\mathscr{B}$的不变子空间. 由$\mathscr{B}$幂零,故有$v_1 \in W$, $v_1 \neq 0$,使得$\mathscr{B}v_1=0$. 故v_1满足(1). ▌

推论 李代数$\mathfrak{g}$是幂零的当且仅当$\forall x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}x$是幂零的.

证 因为$\mathfrak{g}$幂零,故由定理 2.1.2 的条件 2)知$\mathrm{ad}x$幂零. 反之,由$\mathrm{ad}x$幂零,故知$\mathrm{ad}\mathfrak{g}$幂零. 故由$\mathfrak{g}$为$\mathrm{ad}\mathfrak{g}$通过$C(\mathfrak{g})$的扩张,据定理 2.1.1 知$\mathfrak{g}$是幂零的.

注 在证明 Engel 定理时,我们仅用到了幂零线性变换一定有(属于 0 的)特征向量这一事实,这与基域的性质无关. 因而 Engel 定理中的复数域$\boldsymbol{C}$可换成一般域.

定理 2.3.2 (Lie) 设(ρ, V)是复数域$\boldsymbol{C}$上有限维可解李代数$\mathfrak{g}$的有限维表示,则在V中存在一组基$v_1, v_2, \cdots, v_n$使得

$\forall x\in\mathfrak{g}$，$\rho(x)$在此基下的矩阵 $M(\rho(x))$为上三角矩阵，即

$$\mathrm{ent}_{ij}M(\rho(x))=0,\quad i>j,\ \forall x\in\mathfrak{g}. \tag{2}$$

证 显然，$\dim V=1$ 时，Lie 定理成立．一般，如在 V 中有 $v_1\neq 0$，使得

$$\rho(x)v_1=\lambda(x)v_1,\quad \forall x\in\mathfrak{g}, \tag{3}$$

则 $\rho(x)$ 在 $V/L(v_1)$ 上诱导一个线性变换 $\bar{\rho}(x)$．容易证明 $(\bar{\rho},V/L(v_1))$也是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示．于是可对 $\dim V$ 用归纳法证明此定理，其关键在于证明满足(3)的 v_1 的存在性．

$\dim\mathfrak{g}=1$，自不待言．现设 $\dim\mathfrak{g}=m-1$ 时结论成立．设 $\dim\mathfrak{g}=m$．由 $\mathfrak{g}$ 可解，知 $\mathfrak{g}^{(1)}\subset\mathfrak{g}$．设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子空间，满足 $\mathfrak{h}\supseteq\mathfrak{g}^{(1)}$，$\dim\mathfrak{h}=m-1$．故 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，且有 $a\in\mathfrak{g}$，$a\overline{\in}\mathfrak{h}$ 使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus L(a)$．

显然 ρ 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制 $\rho|_{\mathfrak{h}}$ 是一个以 V 为表示空间的 $\mathfrak{h}$ 的表示．又 $\mathfrak{h}$ 可解．故由归纳假设知有 $v_1\neq 0$，使得(3)对 $\forall x\in\mathfrak{h}$ 成立，即 V 的子空间

$$W=\{v\in V\mid \rho(x)v=\lambda(x)v,\ \forall x\in\mathfrak{h}\}\neq\{0\}. \tag{4}$$

设 $v\in W$．令

$$W_k=L(v,\rho(a)v,\cdots,\rho(a)^{k-1}v),\quad k=1,2,\cdots.$$

于是有 $k_0\in\boldsymbol{N}$，使得

$$\{0\}\subset W_1\subset W_2\subset\cdots\subset W_{k_0}=W_{k_0+1}=\cdots,$$

显然 $\rho(a)W_{k_0}\subseteq W_{k_0}$．而对于 $x\in\mathfrak{h}$，有

$$\rho(x)v=\lambda(x)v,$$

$$\begin{aligned}\rho(x)\rho(a)v&=\lambda(x)\rho(a)v+\lambda([x,a])v\\&\equiv\lambda(x)\rho(a)v(\mathrm{mod}\ W_1).\end{aligned}$$

若

$$\rho(x)\rho(a)^iv\equiv\lambda(x)\rho(a)^iv(\mathrm{mod}\ W_i), \tag{5}$$

则有

$$\begin{aligned}\rho(x)\rho(a)^{i+1}v&=\rho(a)\rho(x)\rho(a)^iv+\rho([x,a])\rho(a)^iv\\&\equiv\lambda(x)\rho(a)^{i+1}v(\mathrm{mod}\ W_{i+1}).\end{aligned}$$

由此可知 $\rho(x)W_{k_0}\subseteq W_{k_0}$. 由于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dot{+}L(a)$，因而 W_{k_0}是一个不变子空间. 故由(5)式知

$$\mathrm{tr}\rho(x)|_{W_{k_0}}=\lambda(x)\dim W_{k_0}, \quad \forall x\in\mathfrak{h}.$$

又$[x,a]\in\mathfrak{h}$，$\rho([x,a])|_{W_{k_0}}=[\rho(x)|_{W_{k_0}},\rho(a)|_{W_{k_0}}]$. 因而

$$\lambda([x,a])\dim W_{k_0}=0,$$

即

$$\lambda([x,a])=0, \quad \forall x\in\mathfrak{h}.$$

进而有

$$\rho(x)\rho(a)v=\lambda(x)\rho(a)v, \quad \forall v\in W, x\in\mathfrak{h}.$$

即有 $\rho(a)v\in W$，这说明 W 是 $\rho(a)$的不变子空间. 于是有 $v_1\in W$，$v_1\neq 0$，使得 $\rho(a)v_1=\lambda(a)v_1$. 故此 v_1 满足(3). ▌

推论 1 设 V 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上有限维线性空间，$\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{gl}(V)$的可解子代数，则在适当基下，$\mathfrak{g}$ 中任何元素 $\mathscr{A}$ 的矩阵都是上三角矩阵.

事实上，(id，V)是 $\mathfrak{g}$ 的一个有限维表示.

推论 2 设 $\mathfrak{g}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上有限维李代数，则 $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $\mathfrak{g}^{(1)}$幂零.

证 若$\mathfrak{g}^{(1)}$幂零，则$\mathfrak{g}$ 是交换李代数$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{(1)}$通过幂零李代数$\mathfrak{g}^{(1)}$的扩张，故可解.

反之，设 $\mathfrak{g}$ 可解. 由(ad，$\mathfrak{g}$)为 $\mathfrak{g}$ 的表示. 于是在 $\mathfrak{g}$ 中有基使得对任何 $\mathrm{ad}x(x\in\mathfrak{g})$在此基下的矩阵为上三角矩阵. 故 $\mathrm{ad}[x,y](x, y\in\mathfrak{g})$的矩阵为严格上三角矩阵，故是幂零的. 自然，$\mathrm{ad}[x,y]$在$\mathfrak{g}^{(1)}$的限制也是幂零的. 故由 Engel 定理知 $\mathfrak{g}^{(1)}$是幂零的. ▌

注 将复数域 $\boldsymbol{C}$ 改为特征为零的代数封闭域，Lie 定理仍然成立. 但对更一般的基域，此定理一般不再成立.

习　　题

1. $\mathfrak{g}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上有限维可解李代数. $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的幂零根基(参见本章

§1 习题 6). 又 $D\in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$. 试证 $D\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{n}$.

2. 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上有限维李代数. $\mathfrak{r},\mathfrak{n}$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的根基, 幂零根基. 则 $[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]\subseteq\mathfrak{n}$.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上有限维幂零李代数. 证明存在 $\mathfrak{g}$ 的理想序列 $\mathfrak{g}_n=\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}_{n-1}\supset\cdots\supset\mathfrak{g}_1\supset 0$, 使得 $\mathfrak{g}_i$ 的维数为 i.

§4 幂零线性李代数

在本节中我们总假定 V 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的有限维线性空间. $A\in \mathrm{gl}(V)$ 的属于 λ 的根子空间记为 $V_\lambda(A)$.

引理 2.4.1 设 $A,B\in\mathrm{gl}(V)$, 则

$$(A-\lambda\,\mathrm{id})^n B = B(A-\lambda\,\mathrm{id})^n + \sum_{s=0}^{n-1}(A-\lambda\mathrm{id})^{n-s-1}[A,B](A-\lambda\mathrm{id})^s, \quad (1)$$

其中 $\lambda\in\boldsymbol{C}$.

又若存在 $k\in\boldsymbol{N}$, 使得

$$(\mathrm{ad}A)^k B=0, \quad (2)$$

则 $V_\lambda(A)$ 是 B 的不变子空间.

证 由

$$(A-\lambda\,\mathrm{id})B=B(A-\lambda\,\mathrm{id})+[A,B]$$

知 $n=1$ 时公式(1)成立. 现设 n 时(1)成立, 则

$$\begin{aligned}(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n+1}B &= (A-\lambda\,\mathrm{id})^n(A-\lambda\,\mathrm{id})B\\ &= (A-\lambda\,\mathrm{id})B(A-\lambda\,\mathrm{id})^n\\ &\quad+\sum_{s=0}^{n-1}(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n-s-1}[A,(A-\lambda\,\mathrm{id})B](A-\lambda\,\mathrm{id})^s\\ &= B(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n+1}+[A,B](A-\lambda\,\mathrm{id})^n\\ &\quad+\sum_{s=0}^{n-1}(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n-s}[A,B](A-\lambda\,\mathrm{id})^s\\ &= B(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n+1}+\sum_{s=0}^{n}(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n-s}[A,B](A-\lambda\,\mathrm{id})^s.\end{aligned}$$

因而公式(1)成立.

若 $k=1$ 时(2)式成立,即 A 与 B 交换. 显然,$V_\lambda(A)$在 B 的作用下不变. 若 $k-1$ 时(2)式成立,$V_\lambda(A)$是 B 的不变子空间. 则由 $(\mathrm{ad}A)^k=(\mathrm{ad}A)^{k-1}[A,B]=0$,知$[A,B]V_\lambda(A)\subseteq V_\lambda(A)$. 而且当 $n=2\dim V_\lambda(A)$时,

$$(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n+1}BV_\lambda(A)=B(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n+1}V_\lambda(A)$$
$$+\sum_{s=0}^{n}(A-\lambda\,\mathrm{id})^{n-s}[A,B](A-\lambda\,\mathrm{id})^sV_\lambda(A)=0,$$

即 $BV_\lambda(A)\subseteq V_\lambda(A)$. ▎

定义 2.4.1 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathrm{gl}(V)$的子代数. $\varphi\in\mathfrak{h}^*$ 称为 $\mathfrak{h}$ 的**权**,若 $\exists\ v\in V,v\neq0$,使得

$$Hv=\varphi(H)v,\quad \forall H\in\mathfrak{h}. \tag{3}$$

此时称 v 为对应于 φ 的**权向量**.

若以 $E_\lambda(A)$表示线性变换 A 的属于 λ 的特征子空间,则 $\varphi\in\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$ 的权当且仅当 $\bigcap\limits_{H\in\mathfrak{h}}E_{\varphi(H)}(H)\neq\{0\}$,其中非零向量即为对应于 φ 的权向量. 由 Lie 定理可知,若 $\mathfrak{h}$ 为可解李代数,则 $\mathfrak{h}$ 一定有权.

定理 2.4.2 设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathrm{gl}(V)$的幂零子代数,$\varphi\in\mathfrak{h}^*$, $n=\dim V$. 令

$$V_\varphi(\mathfrak{h})=\{v\in V\mid(H-\varphi(H)\mathrm{id})^nv=0,\ \forall H\in\mathfrak{h}\},$$

则

$$V_\varphi(\mathfrak{h})=\bigcap_{H\in\mathfrak{h}}V_{\varphi(H)}(H) \tag{4}$$

为 $\mathfrak{h}$ 的不变子空间.

$V_\varphi(\mathfrak{h})\neq\{0\}$当且仅当 φ 为 $\mathfrak{h}$ 的权. 此时称 $V_\varphi(\mathfrak{h})$为 $\mathfrak{h}$ 的对应于 φ 的**权子空间**.

设 Δ 为 $\mathfrak{h}$ 的所有权的集合,则 V 有权子空间的直和分解

$$V=\sum_{\varphi\in\Delta}{}^{\boldsymbol{\cdot}}\ V_\varphi(\mathfrak{h}). \tag{5}$$

证 令(4)式右端的子空间为 V'. 显然 $V'\supseteq V_\varphi(\mathfrak{h})$. 又 $\forall H,B$

$\in\mathfrak{h}$,由 $\mathfrak{h}$ 是幂零的,知有 $k\in N$,使得 $(\mathrm{ad}H)^kB=0$. 由引理 2.4.1 知 $V_{\varphi(H)}(H)$ 在 B 的作用下不变. 故 V' 是 B 不变的,因而也是 $\mathfrak{h}$ 的不变子空间. 故 $\left\{H|_{V'}\,\middle|\,H\in\mathfrak{h}\right\}$ 为 $\mathrm{gl}(V')$ 的幂零子代数. 由 Lie 定理知,在 V' 中有基使得 $\forall H\in\mathfrak{h}$,$H|_{V'}$ 在此基下的矩阵 $M(H)$ 为上三角矩阵,即

$$M(H)=\begin{pmatrix}\lambda_1(H) & & & *\\ & \lambda_2(H) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m(H)\end{pmatrix}.$$

又 $V'=\bigcap\limits_{H\in\mathfrak{h}}V_{\varphi(H)}(H)$,故有 $\lambda_i(H)=\varphi(H)$,$i=1,2,\cdots,m$. 由此有

$$(H|_{V'}-\varphi(H)\mathrm{id}_{V'})^m=0,$$

故 $V'\subseteq V_\varphi(\mathfrak{h})$.

若 φ 为 $\mathfrak{h}$ 的权,故有权向量 $v\neq0$,满足(3)式. 显然,$v\in V_\varphi(\mathfrak{h})$,故 $V_\varphi(\mathfrak{h})\neq\{0\}$. 反之,若 $V_\varphi(\mathfrak{h})\neq\{0\}$. 由于 $V_\varphi(\mathfrak{h})$ 在 $\mathfrak{h}$ 下不变,故由 Lie 定理知有 $v\in V_\varphi(\mathfrak{h})$,$v\neq0$,使得 $Hv=\mu(H)v$, $\forall H\in\mathfrak{h}$. 另一方面又有 $(H-\varphi(H)\mathrm{id})^nv=0$. 因而 $(\mu(H)-\varphi(H))^nv=0$. 故 $\mu(H)=\varphi(H)$,即 φ 是 $\mathfrak{h}$ 的权.

对 $\dim V$ 用归纳法证明(5)式. $\dim V=1$,这是显然的. 一般,若 $\forall H\in\mathfrak{h}$,H 只有一个特征值 $\varphi(H)$. 由 Lie 定理知 $V=V_\varphi(\mathfrak{h})$. 设存在 $H\in\mathfrak{h}$,H 的不同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s(s\geqslant2)$,故 V 对 H 有根子空间分解:

$$V=V_{\lambda_1}(H)\dotplus V_{\lambda_2}(H)\dotplus\cdots\dotplus V_{\lambda_s}(H).$$

由引理 2.4.1 知,$V_{\lambda_i}(H)$ 为 $\mathfrak{h}$ 的不变子空间,且 $\dim V_{\lambda_i}(H)<\dim V$. 因而有

$$V_{\lambda_i}(H)=\sum_{\varphi_i\in\Delta_i}{}^{\boldsymbol\cdot}\,V_{\varphi_i}(\mathfrak{h}),$$

其中 Δ_i 为 $\mathfrak{h}$ 限制在 $V_{\lambda_i}(H)$ 上的权集. 显然,$\varphi_i\in\Delta_i$ 时,$\varphi_i(H)=\lambda_i$. 于是 $i\neq j$ 时 $\Delta_i\cap\Delta_j=\varnothing$,而且

$$V=\sum_{\varphi\in\Delta}{}^{\bullet}\ V_{\varphi}(\mathfrak{h}),$$

其中 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\cup\Delta_s$ 为 $\mathfrak{h}$ 的权集. ▌

推论 1 $\mathrm{gl}(V)$中幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 同构于

$$\mathfrak{n}(n_1,\boldsymbol{C})\oplus\mathfrak{n}(n_2,\boldsymbol{C})\oplus\cdots\oplus\mathfrak{n}(n_t,\boldsymbol{C})$$

的子代数,其中 $t=|\Delta|=|\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_t\}|$, $n_i=\dim V_{\varphi_i}(\mathfrak{h})$.

事实上,若 V 对 $\mathfrak{h}$ 有权子空间分解(5),则可在 $V_{\varphi_i}(\mathfrak{h})$中取基,再合成 V 的基,在此基下, $\forall H\in\mathfrak{h}$ 的矩阵 $M(H)$为下面形式的准对角矩阵:

$$M(H)=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}\varphi_1(H) & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_1(H)\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\varphi_t(H) & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_t(H)\end{pmatrix}\right),$$

因而推论 1 成立. ▌

推论 2 设 φ 是 $\mathrm{gl}(V)$的幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 的一个权,则 $\varphi(H)=0$, $\forall H\in\mathfrak{h}^{(1)}$.

由推论 1 即可得此结论. ▌

习 题

1. 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{gl}(V)$的幂零子代数. V 对 $\mathfrak{g}$ 的权子空间分解为 $V=\sum_{\varphi\in\Delta}{}^{\bullet}\ V_{\varphi}(\mathfrak{g})$. 又 W 为 $\mathfrak{g}$ 的不变子空间. 试证 W 对 $\mathfrak{g}$ 的权子空间分解为

$$W=\sum_{\varphi\in\Delta}{}^{\bullet}\ W_{\varphi}(\mathfrak{g}),\quad W_{\varphi}(\mathfrak{g})=W\cap V_{\varphi}(\mathfrak{g}).$$

§5 Killing 型

本节中所讨论的李代数均为有限维李代数.

定义 2.5.1 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的 n 维李代数. $\mathfrak{g}$ 上的二元函数

$$(x,y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y),\quad x,y\in\mathfrak{g}\tag{1}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Killing 型**.

例 2.5.1 设 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上的 n 维幂零李代数，(x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型，则 $(x,y)=0$，$\forall x,y\in\mathfrak{g}$.

因为 $\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零线性变换，故知其迹为零.

定理 2.5.1 设 (x,y) 为域 F 上 n 维李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型，则

1) (x,y) 是 $\mathfrak{g}$ 上的对称双线性型；

2) $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$，有

$$(\mathrm{ad}x(y),z)+(y,\mathrm{ad}x(z))=0, \tag{2}$$

或等价地有

$$([x,y],z)+(y,[x,z])=0; \tag{3}$$

3) $\forall x,y\in\mathfrak{g}$，$\mathscr{A}\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$，有

$$(\mathscr{A}(x),\mathscr{A}(y))=(x,y). \tag{4}$$

证 1) 容易直接验证 (x,y) 是 $\mathfrak{g}$ 上对称双线性型.

2)
$$\begin{aligned}
&([x,y],z)+(y,[x,z])\\
&=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}[x,y]\mathrm{ad}z)+\mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\ \mathrm{ad}[x,z])\\
&=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y\ \mathrm{ad}z-\mathrm{ad}y\ \mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}z)\\
&\quad+\mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\ \mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}z-\mathrm{ad}y\ \mathrm{ad}z\ \mathrm{ad}x)\\
&=0.
\end{aligned}$$

3) 由引理 1.5.3 知

$$\begin{aligned}
(\mathscr{A}(x),\mathscr{A}(y))&=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\mathscr{A}(x)\mathrm{ad}\mathscr{A}(y))\\
&=\mathrm{tr}(\mathscr{A}\cdot\mathrm{ad}x\cdot\mathrm{ad}y\cdot\mathscr{A}^{-1})\\
&=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y)=(x,y).
\end{aligned}$$ ▌

定理 2.5.2 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 以 $(x,y)_{\mathfrak{h}}$，(x,y) 分别表示 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型，则

1) $(x,y)_{\mathfrak{h}}$ 是 (x,y) 在 $\mathfrak{h}$ 上的限制，即

$$(x,y)_{\mathfrak{h}}=(x,y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{h}; \tag{5}$$

2) $\mathfrak{g}$ 中子集

$$\mathfrak{h}^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}\mid (x,\mathfrak{h})=0\}$$

为 $\mathfrak{g}$ 的理想.

证 1) 设 $\dim\mathfrak{g}=n$, $\dim\mathfrak{h}=m$. 分别记 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示为 $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}},\mathfrak{h})$, $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. 将 $\mathfrak{h}$ 的一组基 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 扩充为 $\mathfrak{g}$ 的一组基 $x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n$. 对于 $x,y\in\mathfrak{h}$ 仍以 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}y$ 表示它们在基 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 下的矩阵; $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}y$ 表示它们在基 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 下的矩阵. 由于 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 故有

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x(x_j)=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x(x_j),\quad 1\leqslant j\leqslant m;$$
$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}y(x_j)=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}y(x_j),\quad 1\leqslant j\leqslant m.$$

而

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x(x_j),\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}y(x_j)\in\mathfrak{h},\quad m+1\leqslant j\leqslant n,$$

即

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}x=\begin{pmatrix}\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}x & * \\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}y=\begin{pmatrix}\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}y & * \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因而(5)式成立.

2) 显然, $\mathfrak{h}^{\perp}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的线性子空间. 设 $x\in\mathfrak{h}^{\perp}$, $h\in\mathfrak{h}$, $y\in\mathfrak{g}$. 于是由

$$([x,y],h)=(x,[y,h])=0$$

知 $\mathfrak{h}^{\perp}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. ▌

引理 2.5.3 设 $\mathfrak{a}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 又 (x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型, 则

1) 当 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想时, $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{g}^{\perp}$;

2) 当 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}^{\perp}$ 时, $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\subseteq\mathfrak{g}^{\perp}$;

3) $[\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp},\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}]\subseteq\mathfrak{g}^{\perp}$, 对 $\mathfrak{g}$ 的任何理想 $\mathfrak{a}$ 成立;

4) 当 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}=\{0\}$ 时, $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^{\perp}$.

证 1) 由于 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想, 因此 $\mathfrak{a}^i$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 设 $x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{g}$, 则

$$\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{a},$$
$$\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y(\mathfrak{a}^i)\subseteq\mathfrak{a}^{i+1},\quad i=0,1,2,\cdots.$$

由此可知当 $\mathfrak{a}$ 为幂零理想时 $(x,y)=0$, 即结论 1)成立.

2) 设 $x,y\in\mathfrak{a}$. 由 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}^{\perp}$, 故 $(x,y)=0$. 又设 $z\in\mathfrak{g}$, 则 $[x,z]\in$

$\mathfrak{a}$,$([x,y],z)=-(y,[x,z])=0$. 故结论 2)成立.

3) 由 $\mathfrak{a}$ 为理想. 故 $\mathfrak{a}^{\perp}$,$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}$ 亦为 $\mathfrak{g}$ 的理想,且$(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp},\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp})=0$,故由结论 2)知结论 3)成立.

4) 由于 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,故 $\mathfrak{a}^{\perp}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 故我们只要证明 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^{\perp}$,则结论 4)成立. 当 $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$ 或 $\mathfrak{a}=\{0\}$ 时,结论是显然的. 故不妨设 $0<\dim\mathfrak{a}=m<\dim\mathfrak{g}=n$. 在 $\mathfrak{a}$ 中取基 $x_1,x_2,\cdots,x_m$. 又设 $y\in\mathfrak{g},y\overline{\in}\mathfrak{a}$. 齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{m}(x_j,x_i)\lambda_j+(y,x_i)\lambda_{m+1}=0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

有 $m+1$ 个未知数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m+1}$,只有 m 个方程,因而一定有非零解 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{m+1}$. 令 $z=\sum_{\lambda=1}^{m}\lambda_j x_j+\lambda_{m+1}y$,显然 $z\in\mathfrak{a}^{\perp}$. 若 $\lambda_{m+1}=0$,则 $z\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}=\{0\}$. 于是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$. 故 $\lambda_{m+1}\neq 0$. 于是

$$y=\frac{1}{\lambda_{m+1}}z-\frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{\lambda=1}^{m}\lambda_j x_j\in\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^{\perp},$$

即结论 4)成立. ▌

由这个引理立即可以得到下面的重要定理.

定理 2.5.4 设 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上的有限维李代数,$\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是非退化的,即 $\mathfrak{g}^{\perp}=\{0\}$,则

1) $\mathfrak{g}$ 是半单李代数;

2) 对 $\mathfrak{g}$ 的任一理想 $\mathfrak{a}$,$\mathfrak{g}$ 有分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^{\perp},\tag{6}$$

且 $\mathfrak{a}$,$\mathfrak{a}^{\perp}$ 的 Killing 型也是非退化的;

3) $\mathfrak{g}$ 可唯一地(除次序外)分解为单理想的直和:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r,\tag{7}$$

其中 $\mathfrak{g}_i$ 是单李代数,且 $\mathfrak{g}$ 的任一理想 $\mathfrak{a}$ 有分解:

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{g}_{i_1}\oplus\mathfrak{g}_{i_2}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{i_s},$$

这里 $\mathfrak{g}_{i_j}\in\{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_r\}$.

证 1) 由引理 2.5.3 的结论 1)与定理 2.1.6 知本定理的结

论 1) 成立.

2) 设 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 由引理 2.5.3 的结论 3)知$[\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp},\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}]\subseteq\mathfrak{g}^{\perp}=\{0\}$,故 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的交换理想. 再由该引理的结论 1)知 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^{\perp}\subseteq\mathfrak{g}^{\perp}=\{0\}$. 最后由该引理的结论 4)知

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^{\perp}.$$

以 $(x,y)_{\mathfrak{a}}$ 表示 $\mathfrak{a}$ 的 Killing 型. 若 $x\in\mathfrak{a}$,使得 $\forall z\in\mathfrak{a},(x,z)_{\mathfrak{a}}=0$. 由定理 2.5.2 的结论 1)知$(x,z)=0$,即$(x,\mathfrak{a})=0,(x,\mathfrak{a}^{\perp})=0$. 故 $x\in\mathfrak{g}^{\perp}=\{0\}$. 因而 $\mathfrak{a}$ 的 Killing 型非退化. 同理 $\mathfrak{a}^{\perp}$的 Killing 型也是非退化的.

3) 设 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非零极小理想. 若 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}$,则 $\mathfrak{g}$ 是单李代数. 设 $\mathfrak{g}_1\neq\mathfrak{g}$,故 $\mathfrak{g}_1^{\perp}\neq\{0\}$,且

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_1^{\perp}.$$

由定理 1.6.1 的结论 2)知 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 的理想也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 由于 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极小理想,故 $\mathfrak{g}_1$ 是单李代数. 由于 $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 的 Killing 型也是非退化的,故可将 $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ 继续分解. 有限步之后有

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r.$$

设 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个极小理想. 若 $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{g}_i(1\leqslant i\leqslant r)$,则 $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_i=\{0\}$,故$[\mathfrak{b},\mathfrak{g}_i]\subseteq\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_i=\{0\}$. 由此有 $\mathfrak{b}\subseteq C(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{g}^{\perp}=\{0\}$. 矛盾. 因而 $\exists\, i_0$,使 $\mathfrak{b}=\mathfrak{g}_{i_0}$. 由此易得 $\mathfrak{g}$ 的分解不计 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_r$ 的次序是唯一的,且对 $\mathfrak{g}$ 的任何理想 $\mathfrak{a}$ 有

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{i_1}\oplus\mathfrak{g}_{i_2}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{i_s},\quad \mathfrak{g}_{i_j}\in\{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_r\}.\quad \blacksquare$$

推论 若李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化,则 $\mathfrak{g}^{(1)}=\mathfrak{g}$.

事实上,设 $\mathfrak{g}$ 有单理想分解(7),则$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i]$为 $\mathfrak{g}_i$ 的非零理想. 故 $\mathfrak{g}_i=\mathfrak{g}_i^{(1)}$,因而 $\mathfrak{g}^{(1)}=\mathfrak{g}$. $\blacksquare$

定理 2.5.5 设 $\mathfrak{g}$ 为有限维李代数.

1) $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化,则 $\mathfrak{g}$ 为完备李代数;

2) 若 $\mathfrak{g}$ 是李代数 $\mathfrak{b}$ 通过李代数 $\mathfrak{a}$ 的扩张,其中 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 的 Killing 型都是非退化的,则此扩张为平凡扩张,且 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型也是非

退化的.

证 1) 若 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化,由引理 2.5.3 的结论 1) 知 $C(\mathfrak{g})=\{0\}$. 于是 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 同构. 记 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型为 $(D_1,D_2)_\delta$, $D_i\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}$,则

$$\mathfrak{a}=(\mathrm{ad}\mathfrak{g})^{\perp}=\{D\in\mathrm{Der}\mathfrak{g}\mid(D,\mathrm{ad}\mathfrak{g})_\delta=0\}$$

为 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}$ 的理想. 设 $D\in\mathrm{ad}\mathfrak{g}\cap\mathfrak{a}$. 以 $(\mathrm{ad}x,\mathrm{ad}y)$ 表示 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型,则有 $\forall x\in\mathfrak{g}$

$$(D,\mathrm{ad}x)=(D,\mathrm{ad}x)_\delta=0.$$

由于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化,$\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}$ 同构,故 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型也是非退化的. 因而 $D=0$,即 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}\cap\mathfrak{a}=\{0\}$. 由引理 2.5.3 的结论 4) 知

$$\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathrm{ad}\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{a}.$$

又设 $D\in\mathfrak{a}$, $x\in\mathfrak{g}$. 于是由

$$\mathrm{ad}Dx=[D,\mathrm{ad}x]\in\mathfrak{a}\cap\mathrm{ad}\mathfrak{g}=\{0\}$$

知 $\mathrm{ad}Dx=0$. 再由 ad 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$ 的同构映射,故 $Dx=0$,即 $D=0$. 故 $\mathrm{Der}\mathfrak{g}=\mathrm{ad}\mathfrak{g}$,即 $\mathfrak{g}$ 为完备李代数.

2) 由于 $\mathfrak{a}$ 的 Killing 型非退化,由结论 1)知 $\mathfrak{a}$ 是完备李代数. 由定理 1.6.4 知 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{b}$ 通过 $\mathfrak{a}$ 的平凡扩张. 故不妨设

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}.$$

若 $x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{b}$,则由 $(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y)\mathfrak{a}=(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y)\mathfrak{b}=0$,知 $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=0$. 设 $z\in\mathfrak{g}^{\perp}$,而 $z=x+y$, $x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{b}$. 于是

$$(x,\mathfrak{a})_{\mathfrak{a}}=(x,\mathfrak{a})=(x+y,\mathfrak{a})=0,$$

$$(y,\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}}=(y,\mathfrak{b})=(x+y,\mathfrak{b})=0.$$

故 $x=y=0$,即 $z=0$. 因而 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型也是非退化的. ▌

推论 1 设李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化,$\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想,则 $\mathfrak{a}^{\perp}=C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.

推论 2 若李代数 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,$$

则

$$\mathfrak{g}_2 \subseteq \mathfrak{g}_1^{\perp} \cap C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_1).$$

又 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化，当且仅当 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 的 Killing 型非退化.

这两个推论都很容易证明，请读者完成. ▌

习　题

1. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维李代数. (x,y) 为其 Killing 型. 试证

$$(Dx,y)+(x,Dy)=0, \quad \forall x,y\in\mathfrak{g}, D\in \mathrm{Der}\mathfrak{g}.$$

2. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为域 F 上 n 维李代数 $\mathfrak{g}$ 的基，对应的结构常数为 $C_{ij}^k (1\leqslant i,j,k\leqslant n)$. (x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型，$x=\sum_{i=1}^n a_i x_i$，$y=\sum_{j=1}^n b_j x_j$. 试证

$$(x,y)=\sum_{i,j,k,t} a_i b_j C_{it}^k C_{jk}^t.$$

3. 设 $\mathfrak{g}$ 是非交换的 2 维李代数. 证明 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型不为零.

4. 求 $sl(2,F)$ 的 Killing 型.

5. 设 F 为域，$L=F[t,t^{-1}]$ 为 Laurent 多项式代数. 定义 $L\times L$ 到 F 的映射 φ 为

$$\varphi(f(t),g(t))=\mathrm{coef}_{-1}\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}g(t)\right), \quad \forall f(t),g(t)\in L,$$

其中 $\mathrm{coef}_{-1}(h(t))$ 表示 $h(t)$ 中 t^{-1} 的系数. 试证

1) $\varphi(f(t),g(t))$ 是 L 的反对称双线性函数；

2) $\forall f(t),g(t),h(t)\in L$，有

$$\varphi(f(t)g(t),h(t))+\varphi(g(t)h(t),f(t))+\varphi(h(t)f(t),g(t))=0.$$

6. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数，$L=F[t,t^{-1}]$，(x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 则在 $\mathfrak{g}$ 的 loop 代数 $L(\mathfrak{g})$ 上可定义双线性函数 ψ，使得

$$\psi(f(t)x,g(t)y)=(x,y)\varphi(f(t),g(t)),$$

其中 φ 的定义如习题 5，且 ψ 是 $L(\mathfrak{g})$ 上的 F-值 2-上循环(参看第一章 §4 习题 5 与定义 1.6.6).

7. 写出 $L(\mathfrak{g})$ 关于 ψ 的一维中心扩张 $\widetilde{L}(\mathfrak{g})$（参看定理 1.6.7）.

§6 Cartan 子代数

虽然本节的结论对特征为 0 的代数封闭域都是正确的，但我们仍假定所讨论的李代数 $\mathfrak{g}$ 的基域为复数域 $\boldsymbol{C}$，而且 $\mathfrak{g}$ 是有限维的，并以 (x,y) 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型.

引理 2.6.1 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数. $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示 $(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$ 下的像 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$（简记为 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$）是线性幂零李代数. $\mathfrak{g}$ 对 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 的权子空间 $\mathfrak{g}_\alpha(\mathrm{ad}\mathfrak{h})$ 简记为 $\mathfrak{g}_\alpha$. 设 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 的权子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha, \tag{1}$$

其中 Δ 为权集，则以下结论成立：

1）若 $\alpha,\beta\in\Delta$，则

$$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}, \tag{2}$$

其中当 $\alpha+\beta\overline{\in}\Delta$ 时，约定 $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}=\{0\}$，$\mathfrak{g}_0$ 为子代数.

若 $\alpha,\beta\in\Delta$，$\alpha+\beta\neq0$，则

$$(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta)=0. \tag{3}$$

2）$\mathfrak{h}\subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{g}_0$，而且 (4)

$$\mathfrak{h}=N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})\text{ 当且仅当 }\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0.$$

证 1）设 $x\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y\in\mathfrak{g}_\beta$，$h\in\mathfrak{h}$. 取 $k\in\boldsymbol{N}$ 且 $k\geqslant\dim\mathfrak{g}_\alpha+\dim\mathfrak{g}_\beta$. 由定理 1.5.2，有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}h-(\alpha+\beta)(h)\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^k([x,y])\\&=\sum_{s=0}^{k}C_k^s[(\mathrm{ad}h-\alpha(h)\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^s x,(\mathrm{ad}h-\beta(h)\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k-s}y]\\&=0.\end{aligned}$$

于是(2)式成立，自然 $\mathfrak{g}_0$ 为子代数.

设 $x\in\mathfrak{g}_\alpha$，$y\in\mathfrak{g}_\beta$，$\alpha+\beta\neq0$，$\forall\varphi\in\Delta$，由(2)有

$$\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y(\mathfrak{g}_\varphi)\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta+\varphi}\neq\mathfrak{g}_\varphi.$$

再由(1)式,知$(x,y)=0$,即(3)式成立.

2) 令$l=\dim\mathfrak{h}$. 于是$\forall h\in\mathfrak{h}$,有

$$(\mathrm{ad}h)^{l+1}N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})\subseteq(\mathrm{ad}h)^l\mathfrak{h}=\{0\},$$

故(4)式成立.

由(4)式知$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0$时,$N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$. 反之,设$N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$. 由于$h\in\mathfrak{h}$,$\mathrm{ad}h(\mathfrak{g}_0)\subseteq\mathfrak{g}_0$,而且$\mathrm{ad}h$在$\mathfrak{g}_0$上的限制是幂零的,故由Engel定理的证明可知,在$\mathfrak{g}_0$中存在基,使得在此基下,$\forall h\in\mathfrak{h}$,$\mathrm{ad}h$在$\mathfrak{g}_0$上限制$\mathrm{ad}h|_{\mathfrak{g}_0}$的矩阵都是严格上三角矩阵,即形如

$$\begin{pmatrix}0 & & * \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ 0 & & 0\end{pmatrix}.$$

于是$\forall x\in\mathfrak{g}_0,h_1,h_2,\cdots,h_s\in\mathfrak{h},s=\dim\mathfrak{g}_0$,有$\mathrm{ad}h_1\,\mathrm{ad}h_2\cdots\mathrm{ad}h_s(x)=0$,即

$$\left[h_1,\prod_{i=2}^{s}\mathrm{ad}h_i(x)\right]=0\in\mathfrak{h},\quad\forall h_1\in\mathfrak{h}.$$

因而$\prod_{i=2}^{s}\mathrm{ad}h_i(x)\in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$,亦即$\left[h_2,\prod_{i=3}^{s}\mathrm{ad}h_i(x)\right]\in\mathfrak{h}$,$\forall h_2\in\mathfrak{h}$. 故$\prod_{i=3}^{s}\mathrm{ad}h_i(x)\in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$,…. 经过$s$步之后,得$x\in N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$,即$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}$. ▌

定义 2.6.1 若李代数$\mathfrak{g}$的幂零子代数$\mathfrak{h}$满足$N_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$,则称$\mathfrak{h}$为$\mathfrak{g}$的一个**Cartan 子代数**. 此时分解式(1)称为$\mathfrak{g}$对$\mathfrak{h}$的**根子空间分解**,其中$\mathfrak{g}$对$\mathrm{ad}\mathfrak{h}$的非零权称为$\mathfrak{g}$对于$\mathfrak{h}$的**根**,对应的权子空间称为**根子空间**,所有根的集合称为$\mathfrak{g}$对于$\mathfrak{h}$的**根系**,简称为$\mathfrak{h}$的根系.

若$\mathfrak{h}$为$\mathfrak{g}$的Cartan子代数,则$\mathfrak{g}$对$\mathfrak{h}$的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha,\tag{5}$$

这里的和均为子空间的直和，Δ 为 $\mathfrak{h}$ 的根系.

显然，$\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零子代数. 若不然，则有 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数 $\mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}$. 由定理 2.1.3 知 $\mathfrak{h} \subset N_{\mathfrak{h}_1}(\mathfrak{h}) \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. 这是有违 Cartan 子代数的定义的. 故 $\mathfrak{h}$ 是极大幂零的.

定理 2.6.2 设李代数 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \tag{6}$$

则 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数当且仅当

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_2, \tag{7}$$

且 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ 为 $\mathfrak{g}_i (i=1,2)$ 的 Cartan 子代数.

证 设 π_i 为 $\mathfrak{g}$ 关于分解(6)的 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_i$ 上的自然投影，即

$$\pi_i(x_1 + x_2) = x_i, \quad x_i \in \mathfrak{g}_i (i=1,2).$$

设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 令 $\mathfrak{h}_i = \pi_i(\mathfrak{h})$ $(i=1,2)$. 由

$$\pi_i((\mathrm{ad}h')^m h) = (\mathrm{ad}h')^m(\pi_i(h)), \quad \forall h, h' \in \mathfrak{h}$$

知 $\mathfrak{h}_i \subseteq \mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 因(7)式成立. 又若 $x_i \in N_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i)$，则 $x_i \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，故 $\pi_i(x_i) = x_i \in \pi_i(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_i$，即有 $x_i \in \mathfrak{h}_i$，故 $\mathfrak{h}_i$ 为 $\mathfrak{g}_i$ 的 Cartan 子代数.

反之，设 $\mathfrak{h}$ 满足(7)，且 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i$ 为 $\mathfrak{g}_i$ 的 Cartan 子代数，由定理 2.1.1 知 $\mathfrak{h}$ 是幂零子代数. 又设 $x = x_1 + x_2 \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$，$x_i \in \mathfrak{g}_i$，$h = h_1 + h_2 \in \mathfrak{h}$，$h_i \in \mathfrak{h}_i$，则有

$$[x, h] = [x_1, h_1] + [x_2, h_2] \in \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2.$$

由此知 $[x_i, h_i] \in \mathfrak{h}_i (i=1,2)$，故 $x_i \in N_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i) = \mathfrak{h}_i$. 由此有 $x \in \mathfrak{h}$. 于是 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. ▌

为证明李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数存在，我们需要下面的定义.

定义 2.6.2 设 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数. $x \in \mathfrak{g}$，以 n_x 表示 λ 在 $\mathrm{ad}x$ 的特征多项式 $\det(\lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{ad}x)$ 中的重数. 称 $n = \min\{n_x \mid x \in \mathfrak{g}\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**秩**. 又若 $x \in \mathfrak{g}$，$n_x = n$，称 x 为**正则元**；$n_x > n$，称 x 为**奇异元**.

由于 $\mathrm{ad}x(x) = 0$，故 $n_x \geq 1$，$\forall x \in \mathfrak{g}$，于是有 $n \geq 1$. 对于 $x \in \mathfrak{g}$，有

$$\det(\lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} - \mathrm{ad}x) = \lambda^{r_x} g(\lambda), \quad (\lambda, g(\lambda)) = 1,$$

$(\lambda, g(\lambda))$表示首项系数为 1 的 λ 与 $g(\lambda)$的最大公因式.

显然,$\mathfrak{g}$ 的任何自同构将正则元变为正则元,将奇异元变为奇异元. 正则元一定存在.

引理 2.6.3 设 x_0 是李代数 $\mathfrak{g}$ 中一个给定的元素. 若 $\forall y \in \mathfrak{g}$,有无穷多个 $\mu \in \boldsymbol{C}$,使得 $\mathrm{ad}(x_0 + \mu y)$都是 $\mathfrak{g}$ 的幂零线性变换,则 $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数.

证 设 $\mathrm{ad}(x_0 + \mu y)$的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^m + a_1(\mu)\lambda^{m-1} + \cdots + a_m(\mu),$$

其中 $m = \dim\mathfrak{g}$. 显然 $a_i(\mu)$是 μ 的多项式,并且 $\deg a_i(\mu) \leqslant m$. 而 $a_i(\mu) = 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m)$的充要条件是 $\mathrm{ad}(x_0 + \mu y)$是幂零线性变换. 由于有无穷多个 μ 使 $\mathrm{ad}(x_0 + \mu y)$是幂零的,故 $a_i(\mu)(1 \leqslant i \leqslant m)$有无穷多个根. 于是 $a_i(\mu) = 0$, $\forall \mu \in \boldsymbol{C}$,亦即 $\forall \mu \in \boldsymbol{C}, y \in \mathfrak{g}$,$\mathrm{ad}(x_0 + \mu y)$是幂零的. 因而,$\forall z \in \mathfrak{g}$,$\mathrm{ad}z = \mathrm{ad}(x_0 + (z - x_0))$是幂零的,故由 Engel 定理的推论知 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数. ▌

定理 2.6.4 李代数 $\mathfrak{g}$ 一定包含 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$,且 $\dim\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的秩 n.

证 设 x_0 为 $\mathfrak{g}$ 的正则元,$\mathfrak{g}$ 对 $\mathrm{ad}x_0$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0) + \sum_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}x_0).$$

由引理 2.6.1 知 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)$为 $\mathfrak{g}$ 的子代数,且 $\dim\mathfrak{h} = n$;又易知

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}x_0)] \subseteq \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}x_0).$$

换言之,$\mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}x_0)$ 是 $\mathrm{ad}x$ 的不变子空间,这里 $x \in \mathfrak{h}$.

以 $D(x)$表示 $\mathrm{ad}x$ 在 $\tilde{\mathfrak{g}}$上限制 $\mathrm{ad}x|_{\tilde{\mathfrak{g}}}$的行列式,因而 $D(x_0) \neq 0$. 于是 $\forall y \in \mathfrak{h}$,$D(x_0 + \mu y)$是 μ 的非零多项式,故只有有限个根 μ_1, μ_2 $\cdots, \mu_k$. 设 $\mu \neq \mu_i (1 \leqslant i \leqslant k)$. 则 $\mathrm{ad}(x_0 + \mu y)$的特征值 0 的重数 $n_{x_0 + \mu y} \geqslant n$. 但是 $D(x_0 + \mu y) \neq 0$,故 $n_{x_0 + \mu y} \leqslant \dim\mathfrak{h} = n$. 于是 $n_{x_0 + \mu y} = n$,故 $\mathrm{ad}(x_0 + \mu y)$限制在 $\mathfrak{h}$ 上是幂零的. 由引理 2.6.3 知 $\mathfrak{h}$ 是幂零李代

数，再由引理 2.6.1 知 $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})$. 另一方面又有 $\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)=\mathfrak{h}$，故 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，且 $\dim\mathfrak{h}=n$. ▌

推论 1 若李代数 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 含有 $\mathfrak{g}$ 的正则元 x_0，则 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

证 由上面的证明知 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)\supseteq\mathfrak{h}$，故 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)$ 为 Cartan 子代数. ▌

推论 2 若李代数 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数 $\mathfrak{h}$ 含有 $\mathfrak{g}$ 的正则元 x_0，则 $\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

证 由于 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)\supseteq\mathfrak{h}$，因而有

$$\mathfrak{h}_1\supseteq\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})\supseteq\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_1,$$

故 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. ▌

习　题

1. 举例说明李代数 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零子代数不一定是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

2. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，$\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{g}_1\supseteq\mathfrak{h}$. 试证 $\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数.

3. 设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，$\theta\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. 试证 $\theta(\mathfrak{h})$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

4. 试证 $h=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 是 $sl(n,\boldsymbol{C})$ 的正则元当且仅当 $i\neq j$ 时，$\lambda_i\neq\lambda_j$.

5. 设 $\mathfrak{h}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，Δ 是 $\mathfrak{h}$ 的根系，则 $x\in\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的正则元的充分必要条件是 $\forall\alpha\in\Delta,\alpha(x)\neq0$.

§7　Cartan 准则

本节将给出用 Killing 型来判断有限维复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的李代数何时可解，何时半单，即介绍 **Cartan 准则**.

引理 2.7.1 设 (ρ,V) 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示，则

$$\mathrm{tr}\rho(x)=0, \quad \forall x\in \mathfrak{g}^{(1)}. \tag{1}$$

证 我们只要注意到

$$\mathrm{tr}\rho([x,y])=\mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)-\rho(y)\rho(x))=0,$$

就知此引理成立. ▌

引理 2.7.2 设 $\mathfrak{g}$ 是复数域 C 上有限维李代数,$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数,$\dim\mathfrak{h}=n$,$\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha. \tag{2}$$

记 $\dim\mathfrak{g}_\alpha=r_\alpha$,$(x,y)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 则

1) $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}h=\sum_{\alpha\in\Delta}r_\alpha\alpha(h), \quad \forall h\in\mathfrak{h};$ (3)

2) $\alpha([x,y])=0, \quad \forall x,y\in\mathfrak{h},\alpha\in\Delta;$ (4)

3) $(x,y)=\sum_{\alpha\in\Delta}r_\alpha\alpha(x)\alpha(y), \quad \forall x,y\in\mathfrak{h};$ (5)

4) 设 $\alpha,\beta\in\Delta$. 又 p,q 分别为 $\{k\in\mathbf{Z}\mid\beta+k\alpha\in\Delta\}$ 的最小值,最大值,则

$$\sum_{k=p}^{q}r_{\beta+k\alpha}(\beta(z)+k\alpha(z))=0, \quad \forall z\in[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}], \tag{6}$$

因而

$$\beta(z)=r_{\alpha\beta}\alpha(z), \quad r_{\alpha\beta}\in\boldsymbol{Q},\ z\in[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]. \tag{7}$$

证 由 $\mathfrak{g}$ 的分解式(2),知在 $\mathfrak{g}$ 中有基使得 $\forall h\in\mathfrak{h}$,$\mathrm{ad}h$ 的矩阵 $M(\mathrm{ad}h)$ 为如下准对角矩阵:

$$M(\mathrm{ad}h)=\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha(h) & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha(h)\end{pmatrix},\cdots\right). \tag{8}$$

于是式 (3),(4)与(5)成立.

显然,$\mathfrak{h}+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}=\mathfrak{g}_1$ 是一个子代数. 由于$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}]\subseteq\mathfrak{g}_{\beta+(k+1)\alpha}$. 再由 $\beta+(q+1)\alpha\overline{\in}\Delta$,故$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{\beta+q\alpha}]=\{0\}$. 假定 $\tilde{\mathfrak{g}}=\sum_{k=p}^{q}\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$,则$[\mathfrak{g}_\alpha,\tilde{\mathfrak{g}}]\subseteq\tilde{\mathfrak{g}}$,同样$[\mathfrak{g}_{-\alpha},\tilde{\mathfrak{g}}]\subseteq\tilde{\mathfrak{g}}$. 显然$[\mathfrak{h},\tilde{\mathfrak{g}}]\subseteq\tilde{\mathfrak{g}}$. 于是 $x\to\mathrm{ad}x\mid_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\forall x\in\mathfrak{g}_1)$,构成 $\mathfrak{g}_1$ 的一个表示,$z\in[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subseteq\mathfrak{h}$. 由引理

2.7.1 与(8)式知(6)式成立. 由(6)式有

$$\beta(z)=-\left(\sum_{k=p}^{q}kr_{\beta+k\alpha}\Big/\sum_{k=p}^{q}r_{\beta+k\alpha}\right)\alpha(z)=r_{\alpha\beta}\alpha(z),$$

其中 $r_{\alpha\beta}\in\boldsymbol{Q}$. ▌

以下我们均假定 $\mathfrak{g}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的有限维李代数. (x,y)是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型.

定理 2.7.3 李代数 $\mathfrak{g}$ 对于下列条件等价:

1) $\mathfrak{g}$ 是可解李代数;

2) $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(1)})=0$,即 $\mathfrak{g}^{(1)}\subseteq\mathfrak{g}^{\perp}$;

3) $(x,x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}^{(1)}$.

证 1) $\Longrightarrow$ 2) 由 $\mathfrak{g}$ 可解,于是在 $\mathfrak{g}$ 中有基使得 $\forall x\in\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}x$ 在此基下的矩阵为上三角矩阵,即

$$M(\mathrm{ad}x)=\begin{pmatrix}\lambda_1(x) & & & *\\ & \lambda_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n(x)\end{pmatrix}.$$

于是 $y\in\mathfrak{g}^{(1)}$时

$$M(\mathrm{ad}y)=\begin{pmatrix}0 & & & *\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix},$$

因而$(x,y)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g},y\in\mathfrak{g}^{(1)}$.

2) $\Longrightarrow$ 3) 由$(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(1)})=0$,自然$(x,x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}^{(1)}$.

3) $\Longrightarrow$ 1) 由于 $\mathfrak{g}^{(k)}(k\geqslant1)$是 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)}$的理想,故 $\mathfrak{g}^{(k)}$的 Killing 型为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型的限制. 于是 $\mathfrak{g}^{(k)}$也满足条件 3). 因而只要能证明 $\mathfrak{g}^{(1)}\subset\mathfrak{g}$,则 $\mathfrak{g}^{(k+1)}\subset\mathfrak{g}^{(k)}$,由此知 $\mathfrak{g}$ 是可解的.

设 $\mathfrak{g}$ 对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的分解如(2)式,因而有

$$\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]+\sum_{\alpha\in\Delta}[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]+\sum_{\beta+\gamma\neq0}[\mathfrak{g}_\beta,\mathfrak{g}_\gamma].$$

若 $\mathfrak{g}^{(1)}=\mathfrak{g}$,则

$$\mathfrak{h}=[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]+\sum_{\alpha\in\Delta}[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}].$$

任取 $\beta\in\Delta$,则由引理 2.7.2 知

$$\beta(x)=0,\quad \forall x\in[\mathfrak{h},\mathfrak{h}],$$

$$(z,z)=\sum_{\beta\in\Delta}r_\beta\beta(z)\beta(z)=\Big(\sum_{\beta\in\Delta}r_\beta r_{\alpha\beta}^2\Big)\alpha(z)^2=0,\quad \forall z\in[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}],$$

这里 $r_{\alpha\beta}\in\boldsymbol{Q}$,$\beta(z)=r_{\alpha\beta}\alpha(z)$. 自然 $r_{\alpha\alpha}=1$,因而 $\alpha(z)=0$,故 $\beta(z)=0$. 因而 $\beta(\mathfrak{h})=0$. 于是 $\Delta=\varnothing$,即 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$,$\mathfrak{h}$ 是幂零的,与 $\mathfrak{g}^{(1)}=\mathfrak{g}$ 矛盾. 因此,$\mathfrak{g}^{(1)}\neq\mathfrak{g}$,故 $\mathfrak{g}$ 是可解的. ▌

推论 若李代数 $\mathfrak{g}$ 满足 $(x,x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}$,则 $\mathfrak{g}$ 为可解李代数.

定理 2.7.4 李代数 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化.

证 在定理 2.5.4 中我们已经证明了 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 (x,y) 非退化时,$\mathfrak{g}$ 是半单李代数. 现设 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是退化的,即 $\mathfrak{g}^\perp\neq\{0\}$,且 $\mathfrak{g}^\perp$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 故 $\mathfrak{g}^\perp$ 的 Killing 型为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{g}^\perp$ 上的限制,由此有 $(x,x)=0$, $\forall x\in\mathfrak{g}^\perp$. 由定理 2.7.3 的推论知 $\mathfrak{g}^\perp$ 是可解的,于是 $\mathfrak{g}$ 不是半单的. ▌

由这个定理我们立刻可将定理 2.5.4,定理 2.5.5 等中的条件"$\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化"换成"$\mathfrak{g}$ 为半单李代数",结论仍然成立. 特别,半单李代数 $\mathfrak{g}$ 可分解为单理想的直和:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_r,$$

而且除 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_r$ 的次序外,这个分解是唯一的.

此外,容易看到半单李代数的非零理想与商代数仍为半单李代数.

习　题

1. 设 V 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的有限维线性空间,$\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{gl}(V)$ 的子代数.

1) $\mathscr{A}\in \mathrm{gl}(V)$，其最低多项式为 $f(\lambda)$，试证存在多项式 $p(\lambda)$，$q(\lambda)$，$\bar{p}(\lambda)\in \boldsymbol{C}[\lambda]$满足：

$$\lambda\mid(p(\lambda),q(\lambda)),\quad f(\lambda)\mid p(\lambda)+q(\lambda),$$

$$\mathscr{A}_s=p(\mathscr{A}),\quad \mathscr{A}_n=q(\mathscr{A}),\quad \bar{p}(\mathscr{A})\mid_{V_{\lambda_i}(\mathscr{A})}=\bar{\lambda}_i\mathrm{id}_{V_{\lambda_i}(\mathscr{A})}.$$

2) $\mathscr{A}$ 是幂零线性变换当且仅当 $\mathrm{tr}(\mathscr{A}\bar{p}(\mathscr{A}))=0$.

3) 如果

$$\mathrm{tr}XY=0,\quad \forall X\in\mathfrak{g}, Y\in\mathfrak{g}^{(1)},$$

则 $\mathfrak{g}$ 是可解李代数.

2. 设 $\mathfrak{r}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基，$\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 试证 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 为半单李代数当且仅当 $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{r}$，且 $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{g}$.

3. 设 $\mathfrak{r},\mathfrak{r}_1$ 分别为李代数 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1$ 的根基，又 f 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 的满同态，试证 $f(\mathfrak{r})=\mathfrak{r}_1$.

§8　典型李代数的 Killing 型与 Cartan 子代数

$sl(l+1,\boldsymbol{C})$，$so(n,\boldsymbol{C})$及 $sp(n,\boldsymbol{C})$统称为复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的典型李代数，在复半单李代数中占有极重要的地位，也是李群、李代数用于其他分支、学科的重要工具. 本节将计算它们的 Killing 型与 Cartan 子代数.

显然，对于任何有限维李代数 $\mathfrak{g}$，若其 Killing 型为(x,y)，则有

$$(x,y)=\frac{1}{2}\{(x+y,x+y)-(x,x)-(y,y)\}. \tag{1}$$

因而要计算 Killing 型只要计算$(x,x)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}x)^2$ 即可. 进一步，我们只要知道$(\mathrm{ad}x)^2$ 在某组基下的矩阵的对角线上的元素就足够了.

又若 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{C})$的子代数，由第一章 §5 知，

$$(\mathrm{ad}X)^2Y=(X_l^2-2X_lX_r+X_r^2)Y$$

$$=X^2Y-2XYX+YX^2,\quad \forall X,Y\in\mathfrak{g}. \tag{2}$$

定理 2.8.1 设 $n>1$，(X,Y) 为 $sl(n,\boldsymbol{C})$ 的 Killing 型，则

1) $(X,Y)=2n\mathrm{tr}XY,\quad \forall X,Y\in sl(n,\boldsymbol{C})$； (3)

2) (X,Y) 是非退化的，即 $sl(n,\boldsymbol{C})$ 是半单的；

3) $\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$ 是 $sl(n,\boldsymbol{C})$ 的 Cartan 子代数.

证 1) 由于 $sl(n,\boldsymbol{C})$ 是 $\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{C})$ 的理想，故 $sl(n,\boldsymbol{C})$ 的 Killing 型为 $\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{C})$ 的 Killing 型的限制. 熟知 $\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{C})$ 有基 $\{E_{ij}\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}$，其中 E_{ij} 满足

$$\mathrm{ent}_{kl}E_{ij}=\delta_{ki}\delta_{lj},\quad 1\leqslant k,l\leqslant n.$$

又 $\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{C})$ 中元素 $X=\sum\limits_{i,j}(\mathrm{ent}_{ij}X)E_{ij}$. 故由(2)知

$$\begin{aligned}&\mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2E_{ij})\\&\quad=\mathrm{ent}_{ij}(X^2E_{ij}-2XE_{ij}X+E_{ij}X^2)\\&\quad=\mathrm{ent}_{ii}X^2-2(\mathrm{ent}_{ii}X)(\mathrm{ent}_{jj}X)+\mathrm{ent}_{jj}X^2.\end{aligned}$$

因而

$$(X,X)=\sum_{i,j}\mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2E_{ij})=2n\mathrm{tr}X^2-2(\mathrm{tr}X)^2.$$

特别，当 $X\in sl(n,\boldsymbol{C})$ 时，$\mathrm{tr}X=0$. 由(1)知(3)式成立.

2) 设 $X\in sl(n,\boldsymbol{C})$，$X\neq 0$. 于是 $\overline{X}'\in sl(n,\boldsymbol{C})$，因而有

$$\begin{aligned}(X,\overline{X}')&=2n\mathrm{tr}X\overline{X}'=2n\sum_{i,j}(\mathrm{ent}_{ij}X)(\mathrm{ent}_{ji}\overline{X}')\\&=2n\sum_{i,j}(\mathrm{ent}_{ij}X)(\overline{\mathrm{ent}_{ij}X})>0.\end{aligned}$$

故 (X,Y) 是非退化的.

3) 设 $h=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathfrak{h}$，显然有

$$[h,\mathfrak{h}]=0,\quad [h,E_{ij}]=(x_i-x_j)E_{ij}.$$

记 $\lambda_i\in\mathfrak{h}^*$ 为 $\lambda_i(h)=x_i$，$\forall h=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_j}=\{xE_{ij}\mid x\in\boldsymbol{C}\},\quad i\neq j.$$

因而有 $sl(n,\boldsymbol{C})$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的权子空间分解为

$$sl(n,C)=\mathfrak{h}\dot{+}\sum_{i\neq j}\mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_j},\tag{4}$$

其中 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})(\mathfrak{g}=sl(n,\boldsymbol{C}))$，故 $\mathfrak{h}$ 为 Cartan 子代数，且(4)式为 $sl(n,\boldsymbol{C})$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解. $\Delta=\{\lambda_i-\lambda_j \mid i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant n\}$. ▌

定理 2.8.2 设 $n\geqslant 3$，(X,Y) 为 $so(n,\boldsymbol{C})$ 的 Killing 型，则

$$(X,Y)=(n-2)\mathrm{tr}XY,\quad \forall X,Y\in so(n,\boldsymbol{C}).\tag{5}$$

(X,Y) 是非退化的，故 $so(n,\boldsymbol{C})$ 是半单的.

证 由于 $X\in so(n,\boldsymbol{C})$ 当且仅当 $X'=-X$，即

$$\mathrm{ent}_{ij}X=-\mathrm{ent}_{ji}X \quad 且 \quad (X^2)'=X^2.$$

又 $\{E_{ij}-E_{ji} \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$ 为 $so(n,\boldsymbol{C})$ 的一组基. 由(2)式，我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2(E_{ij}-E_{ji}))\\&=\mathrm{ent}_{ij}(X^2(E_{ij}-E_{ji})-2X(E_{ij}-E_{ji})X+(E_{ij}-E_{ji})X^2)\\&=\mathrm{ent}_{ii}X^2+2(\mathrm{ent}_{ij}X)(\mathrm{ent}_{ij}X)+\mathrm{ent}_{jj}X^2.\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}(X,X)&=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}X)^2\\&=\sum_{i<j}(\mathrm{ent}_{ii}X^2+\mathrm{ent}_{jj}X^2)-2\sum_{i<j}(\mathrm{ent}_{ij}X)(\mathrm{ent}_{ji}X)\\&=(n-1)\mathrm{tr}X^2-\mathrm{tr}X^2=(n-2)\mathrm{tr}X^2.\end{aligned}$$

再由(1)式得

$$(X,Y)=(n-2)\mathrm{tr}XY.$$

若 $X\in so(n,\boldsymbol{C})$，则 $\overline{X}'\in so(n,\boldsymbol{C})$，故 $X\neq 0$ 时，

$$(X,\overline{X}')=(n-2)\sum_{i,j}(\mathrm{ent}_{ij}X)(\overline{\mathrm{ent}_{ij}X})>0.$$

故 (X,Y) 是非退化的，即 $so(n,\boldsymbol{C})$ 是半单的. ▌

引理 2.8.3 设 $X\in\mathrm{gl}(2n,\boldsymbol{C})$，则

1) $X\in sp(n,\boldsymbol{C})$ 当且仅当

$$X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & -A'\end{pmatrix},\tag{6}$$

其中 $B=B'$，$C=C'$，$A,B,C\in\mathrm{gl}(n,\boldsymbol{C})$；

2) $X\in sp(n,\boldsymbol{C})$ 当且仅当 $\overline{X}'\in sp(n,\boldsymbol{C})$；

3) 令

$$A_{kl}=E_{kl}-E_{n+l,n+k}, \qquad 1\leqslant k,l\leqslant n;$$
$$B_{ij}=E_{i,n+j}+E_{j,n+i}, \qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n;$$
$$C_{ij}=E_{n+i,j}+E_{n+j,i}, \qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,$$

则$\{A_{kl},B_{ij},C_{ij}\mid 1\leqslant k,l\leqslant n,1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$构成$sp(n,\boldsymbol{C})$的一组基.

证 记

$$X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}, \quad J_n=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0\end{pmatrix}.$$

于是$X\in sp(n,\boldsymbol{C})$当且仅当$XJ_n+J_nX'=0$,即(6)式成立,故结论1)成立,进而结论2)与3)成立. ▌

定理 2.8.4 设(X,Y)为$sp(n,\boldsymbol{C})$的 Killing 型,则

1) $(X,Y)=2(n+1)\mathrm{tr}XY, \quad \forall X,Y\in sp(n,\boldsymbol{C});$ (7)

2) (X,Y)是非退化的,即$sp(n,\boldsymbol{C})$是半单李代数;

3) $\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{C}\}$为$sp(n,\boldsymbol{C})$的 Cartan 子代数.

证 由(6)式,有

$$\mathrm{ent}_{i,n+j}X=\mathrm{ent}_{ij}B=\mathrm{ent}_{ji}B=\mathrm{ent}_{j,n+i}X;$$
$$\mathrm{ent}_{n+i,j}X=\mathrm{ent}_{ij}C=\mathrm{ent}_{ji}C=\mathrm{ent}_{n+j,i}X;$$
$$\mathrm{ent}_{n+i,n+j}X=-\mathrm{ent}_{ji}A=-\mathrm{ent}_{ji}X;$$
$$X^2=\begin{pmatrix} A^2+BC & AB-BA' \\ CA-A'C & CB+A'^2\end{pmatrix};$$
$$\mathrm{tr}X^2=2\mathrm{tr}A^2+2\mathrm{tr}BC.$$

用(2)容易算出:对$\forall 1\leqslant i,j\leqslant n$有

$$\begin{aligned}&\mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2A_{ij})\\ &=\mathrm{ent}_{ii}X^2-2(\mathrm{ent}_{ii}X)(\mathrm{ent}_{jj}X)+\mathrm{ent}_{jj}X^2\\ &\quad+2(\mathrm{ent}_{i,n+j}X)(\mathrm{ent}_{n+i,j}X)\\ &=\mathrm{ent}_{ii}X^2-2(\mathrm{ent}_{ii}A)(\mathrm{ent}_{jj}A)+\mathrm{ent}_{jj}X^2\\ &\quad+2(\mathrm{ent}_{ij}B)(\mathrm{ent}_{ji}C);\end{aligned}$$

对 $\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{ent}_{i,n+j}((\mathrm{ad}X)^2B_{ij})\\&\quad=\mathrm{ent}_{ii}X^2-2(\mathrm{ent}_{ii}X)(\mathrm{ent}_{n+j,n+j}X)\\&\qquad-2(\mathrm{ent}_{ij}X)(\mathrm{ent}_{n+i,n+j}X)+\mathrm{ent}_{n+j,n+j}X^2\\&\quad=\mathrm{ent}_{ii}X^2+2(\mathrm{ent}_{ii}A)(\mathrm{ent}_{jj}A)\\&\qquad+2(\mathrm{ent}_{ij}A)(\mathrm{ent}_{ji}A);\\&\mathrm{ent}_{i,n+i}((\mathrm{ad}X)^2B_{ii})\\&\quad=2(\mathrm{ent}_{ii}X^2+2(\mathrm{ent}_{ii}A)(\mathrm{ent}_{jj}A)+\mathrm{ent}_{n+i,n+i}X^2);\end{aligned}$$

对 $\forall 1\leqslant i<j\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{ent}_{n+i,j}((\mathrm{ad}X)^2C_{ij})\\&\quad=\mathrm{ent}_{n+i,n+i}X^2-2(\mathrm{ent}_{n+i,n+i}X)(\mathrm{ent}_{jj}X)\\&\qquad-2(\mathrm{ent}_{n+i,n+j}X)(\mathrm{ent}_{ij}X)+\mathrm{ent}_{jj}X^2\\&\quad=\mathrm{ent}_{n+i,n+i}X^2+2(\mathrm{ent}_{ii}A)(\mathrm{ent}_{jj}A)\\&\qquad+2(\mathrm{ent}_{ji}A)(\mathrm{ent}_{ij}A)+\mathrm{ent}_{jj}X^2;\\&\mathrm{ent}_{n+i,i}((\mathrm{ad}X)^2C_{ii})\\&\quad=2(\mathrm{ent}_{n+i,n+i}X^2+2(\mathrm{ent}_{ii}A)(\mathrm{ent}_{jj}A)+\mathrm{ent}_{ii}X^2).\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}(X,X)&=\sum_{i,j}\mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2A_{ij})+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\mathrm{ent}_{i,n+j}((\mathrm{ad}X)^2B_{ij})\\&\quad+\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\mathrm{ent}_{n+i,j}((\mathrm{ad}X)^2C_{ij})\\&=2(n+1)\mathrm{tr}X^2.\end{aligned}$$

再由(1)式知

$$(X,Y)=2(n+1)\mathrm{tr}XY,\quad \forall X,Y\in sp(n,\boldsymbol{C}).$$

由 $X\in sp(n,\boldsymbol{C}),X\neq 0$,故由引理 2.8.3 知,$\overline{X}'\in sp(n,\boldsymbol{C})$. 因而$(X,\overline{X}')=2(n+1)\mathrm{tr}X\overline{X}'>0$. 故知$(X,Y)$非退化,亦即 $sp(n,\boldsymbol{C})$ 是半单的.

定义 $\mathfrak{h}$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 λ_i 如下:

$\lambda_i(\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n))=x_i.$

于是有

$$[h,A_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)(h)A_{ij},\qquad 1\leqslant i,j\leqslant n;$$
$$[h,B_{ij}]=(\lambda_i+\lambda_j)(h)B_{ij},\qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n;$$
$$[h,C_{ij}]=-(\lambda_i+\lambda_j)(h)C_{ij},\qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n;$$
$$\mathfrak{h}=L(A_{11},A_{22},\cdots,A_{nn}).$$
因此 $\mathfrak{h}=sp(n,\boldsymbol{C})$对 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 的权子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha(\mathrm{ad}\mathfrak{h}),$$

其中

$$\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})=\mathfrak{h},$$
$$\Delta=\{\lambda_i-\lambda_j,\pm(\lambda_k+\lambda_l)\mid 1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j;1\leqslant k\leqslant l\leqslant n\}.$$

$\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$,其基对应为 A_{ij},B_{kl}与 C_{kl}. 特别,$\mathfrak{h}$ 为 $sp(n,\boldsymbol{C})$的 Cartan 子代数. ▍

现在讨论 $so(n,\boldsymbol{C})$的 Cartan 子代数. 将 n 分为奇数与偶数两种情况,而且用一个与 $so(n,\boldsymbol{C})$同构的李代数 $g(n,S,\boldsymbol{C})$来替代 $so(n,\boldsymbol{C})$.

定理 2.8.5 设

$$S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{pmatrix},$$

则 $so(2n+1,\boldsymbol{C})$与 $g(2n+1,S,\boldsymbol{C})$同构;并且

$$\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(0,x_1,x_2,\cdots,x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{C}\}$$

为 $g(2n+1,S,\boldsymbol{C})$的 Cartan 子代数.

证 设

$$Y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}&0&0\\0&\sqrt{-1}I_n&I_n\\0&I_n&\sqrt{-1}I_n\end{pmatrix}.$$

则有 $S=YY'=YI_{2n+1}Y'$. 我们由定理 1.4.1 知 $so(2n+1,\boldsymbol{C})$与 $g(2n+1,S,\boldsymbol{C})$同构,而且容易证明 $X\in g(2n+1,S,\boldsymbol{C})$当且仅当

$$X=\begin{pmatrix} 0 & V & -W' \\ W & A & B \\ -V' & C & -A' \end{pmatrix},\quad B'=-B,\quad C'=-C.$$

于是 $\mathfrak{h}\subseteq g(2n+1,S,\boldsymbol{C})$.

令

$$\begin{aligned}
&W_i=E_{1+i,1}-E_{1,n+1+i}, && 1\leqslant i\leqslant n;\\
&V_i=E_{1,1+i}-E_{n+1+i,1}, && 1\leqslant i\leqslant n;\\
&A_{ij}=E_{1+i,1+j}-E_{n+1+j,n+1+i}, && 1\leqslant i,j\leqslant n;\\
&B_{ij}=E_{1+i,n+1+j}-E_{1+j,n+1+i}, && 1\leqslant i<j\leqslant n;\\
&C_{ij}=E_{n+1+i,1+j}-E_{n+1+j,1+i}, && 1\leqslant i<j\leqslant n,
\end{aligned}$$

则上述元素构成 $g(2n+1,S,\boldsymbol{C})$的基. 又设 $\lambda_i\in\mathfrak{h}^*$ 定义为

$$\lambda_i(\mathrm{diag}(0,x_1,x_2,\cdots,x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n))=x_i,$$

于是 $\forall h\in\mathfrak{h}$,有

$$[h,W_i]=\lambda_i(h)W_i,\quad [h,V_i]=-\lambda_i(h)V_i,$$

$$[h,A_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)(h)A_{ij},\quad [h,B_{ij}]=(\lambda_i+\lambda_j)(h)B_{ij},$$

$$[h,C_{ij}]=-(\lambda_i+\lambda_j)(h)C_{ij}.$$

由这些式子可知 $\mathfrak{h}$ 是 $g(2n+1,S,\boldsymbol{C})$的 Cartan 子代数. $\mathfrak{h}$ 的根系 $\Delta=\{\pm\lambda_k,\pm(\lambda_i-\lambda_j),\pm(\lambda_i+\lambda_j)\mid 1\leqslant k\leqslant n;1\leqslant i<j\leqslant n\}$,而 W_k,V_k, $A_{ij}(i\neq j),B_{ij},C_{ij}$为对应根子空间的基. ▌

定理 2.8.6 设

$$S_1=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

则 $so(2n,\boldsymbol{C})$与 $g(2n,S_1,\boldsymbol{C})$同构,并且

$$\mathfrak{h}=\{(\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{C}\}$$

为其 Cartan 子代数.

证 设

$$Y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}\begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & I_n \\ I_n & \sqrt{-1}I_n \end{pmatrix},$$

则 $S_1 = Y_1 Y_1' = Y_1 I_{2n} Y_1'$. 由定理 1.4.1 知 $so(2n, \boldsymbol{C})$ 与 $g(2n, S_1, \boldsymbol{C})$ 同构，且容易证明 $X_1 \in g(2n, S_1, \boldsymbol{C})$ 当且仅当

$$X_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix}, \quad B' = -B, \quad C' = -C.$$

于是 $g(2n, S_1, \boldsymbol{C})$ 同构于 $g(2n+1, S, \boldsymbol{C})$ 中由 $A_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, B_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 与 $C_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 生成的子代数. 由定理 2.8.5 的证明知 $\mathfrak{h}$ 为 $g(2n, S_1, \boldsymbol{C})$ 的 Cartan 子代数. $\mathfrak{h}$ 的根系

$$\Delta = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_i + \lambda_j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

对应根子空间的基为 $A_{ij}, A_{ji}, B_{ij}, C_{ij}$. ▎

习　题

1. 设 F 是特征为 3 的域，$\mathfrak{g} = sl(3, F)$.

1) 求 $C(\mathfrak{g})$；

2) 判断 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 是否半单；

3) 判断 $\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$ 的 Killing 型是否非退化.

第三章 复半单李代数的结构

本章将研究复数域 C 上半单李代数——复半单李代数的结构. 首先讨论它的 Cartan 子代数与根系的性质,进而引入素根系、Dynkin 图等概念. 这些概念在描述复半单李代数及其表示的结构上都有重要作用. 最后,我们还将给出典型李代数的素根系与 Dynkin 图.

本章我们都假定 $\mathfrak{g}$ 是复半单李代数,$\mathfrak{h}$ 为其 Cartan 子代数. $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 Δ 为 $\mathfrak{h}$ 的根系,$|\Delta|$ 为其元素数. $\mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{h}$ 的对偶空间,故 $\Delta\subset\mathfrak{h}^*$. 又以 (x,y) 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型.

本章的结论很容易推广到特征零的代数封闭域上的半单李代数上去.

§1 3维单李代数及其表示

3 维单李代数的不可约表示在研究半单李代数的结构与表示时均有重要作用,因此有人称之为"解牛尖刀".

定理 3.1.1 设 $\mathfrak{h}$,(x,y) 分别为复 3 维单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数与 Killing 型,则 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}, \tag{1}$$

且有 $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$,$e_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$,$h_\alpha\in\mathfrak{h}$ 使得

$$(e_\alpha,e_{-\alpha})=1, \tag{2}$$

$$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=h_\alpha, \tag{3}$$

$$\alpha(h_\alpha)=1/2,$$

$$[X_\alpha,X_{-\alpha}]=(X_\alpha,X_{-\alpha})h_\alpha,\quad \forall X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,X_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

证 设 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha.$$

若 $|\Delta|=1$，即 $\Delta=\{\alpha\}$. 故 $2\alpha\overline{\in}\Delta$. 由引理 2.6.1 知 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_\alpha]\subseteq\mathfrak{g}_\alpha$，故 $\mathfrak{g}_\alpha$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，这是不可能的. 故 $|\Delta|=2$，即 $\Delta=\{\alpha,\beta\}$. 若 $\alpha+\beta\neq0$，于是 $\alpha+\beta\overline{\in}\Delta$，由引理 2.6.1 知 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\{0\}$，故 $\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_\beta$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，这与 $\mathfrak{g}$ 的单性相违，于是 $\beta=-\alpha$. 若 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]=\{0\}$，仍有 $\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，因而 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\neq\{0\}$. 注意到 $\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{g}_\alpha=\dim\mathfrak{g}_{-\alpha}=1$. 于是 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]=\mathfrak{h}$. 由引理 2.6.1 知 $(\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{h})=0$. 由 (x,y) 非退化，故对 $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,e_\alpha\neq0$，存在唯一的 $e_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得

$$(e_\alpha,e_{-\alpha})=1.$$

令

$$h_\alpha=[e_\alpha,e_{-\alpha}].$$

则有 $h_\alpha\in\mathfrak{h},h_\alpha\neq0$，且 $\forall X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,X_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$，有 $\lambda,\mu\in\boldsymbol{C}$ 使得 $X_\alpha=\lambda e_\alpha$，$X_{-\alpha}=\mu e_{-\alpha}$. 故 $(X_\alpha,X_{-\alpha})=\lambda\mu$. 而 $[X_\alpha,X_{-\alpha}]=\lambda\mu[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\lambda\mu h_\alpha$. 因而

$$[X_\alpha,X_{-\alpha}]=(X_\alpha,X_{-\alpha})h_\alpha.$$

由于 $[h_\alpha,e_\alpha]=\alpha(h_\alpha)e_\alpha,[h_\alpha,e_{-\alpha}]=-\alpha(h_\alpha)e_{-\alpha}$，因而

$$(h_\alpha,h_\alpha)=2\alpha(h_\alpha)^2.$$

但是

$$\begin{aligned}(h_\alpha,h_\alpha)&=([e_\alpha,e_{-\alpha}],h_\alpha)=-(e_{-\alpha},[e_\alpha,h_\alpha])\\&=(e_{-\alpha},\alpha(h_\alpha)e_\alpha)=\alpha(h_\alpha).\end{aligned}$$

故知

$$\alpha(h_\alpha)=1/2.\quad ▌$$

推论 1 复 3 维半单李代数一定是单李代数，且彼此同构，因而都同构于 $sl(2,\boldsymbol{C})$.

证 我们注意到 1 维、2 维李代数都是可解的，故此推论成

立. ▌

推论 2 $\mathfrak{h}^*$到 $\mathfrak{h}$ 的映射：$\lambda\alpha\to\lambda h_\alpha=h_{\lambda\alpha}(\forall\lambda\in\boldsymbol{C})$是 $\mathfrak{h}^*$到 $\mathfrak{h}$ 的线性同构映射，且满足

$$\beta(h)=(h_\beta,h),\quad \forall h\in\mathfrak{h},\beta\in\mathfrak{h}^*. \tag{4}$$

证 因为 $\dim\mathfrak{h}^*=\dim\mathfrak{h}=1$，$\alpha\in\mathfrak{h}^*$，$\alpha\neq 0$，$h_\alpha\in\mathfrak{h}$，$h_\alpha\neq 0$. 故 $\lambda\alpha\to\lambda h_\alpha=h_{\lambda\alpha}$是线性同构. 设 $\beta\in\mathfrak{h}^*$，于是 $\beta=\lambda\alpha$，$\lambda\in\boldsymbol{C}$. 因而 $h_\beta=\lambda h_\alpha$. 由此得 $\beta(h)=\lambda\alpha(h)$. 而$(h_\alpha,h)=2\alpha(h_\alpha)\alpha(h)=\alpha(h)$，因而 $\beta(h)=(h_\beta,h)$，$\forall h\in\mathfrak{h},\beta\in\mathfrak{h}^*$. ▌

由这个推论，我们将 β 与 h_β 等同起来. 于是 $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}$，$(\beta,\beta)=(h_\beta,h_\beta)$，$\forall\beta\in\mathfrak{h}^*$. 于是有

$$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha,\quad (\alpha,\alpha)=1/2,$$

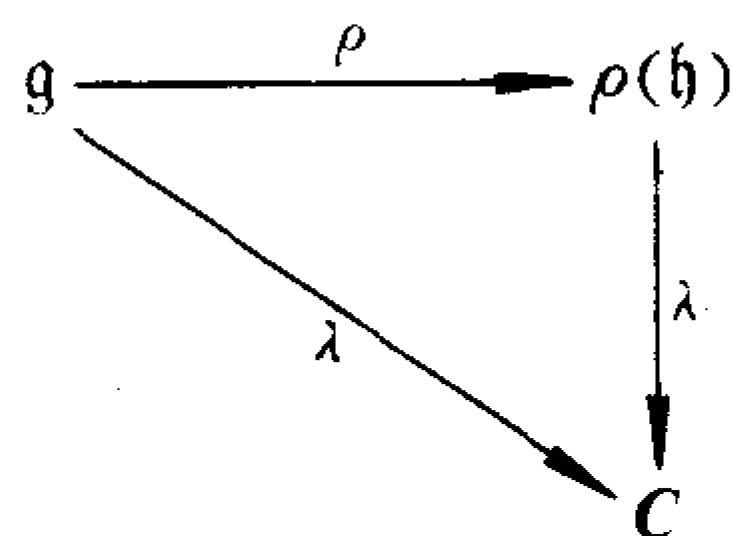
$$[h,e_\alpha]=(\alpha,h)e_\alpha,\quad [h,e_{-\alpha}]=-(\alpha,h)e_{-\alpha},\quad \forall h\in\mathfrak{h}.$$

由下面公式所定义的 w_α

$$w_\alpha(\beta)=\beta-\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,\quad \forall\beta\in\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h} \tag{5}$$

实际上是$-\mathrm{id}_{\mathfrak{h}^*}$. 我们用这种颇为复杂的形式是为与一般的复半单李代数保持一致.

设(ρ,V)是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 于是 $\rho(\mathfrak{h})$是 $\mathrm{gl}(V)$的幂零子代数. 因而 V 对 $\rho(\mathfrak{h})$有权子空间的直和分解(参看第二章 § 4)，又对任一 $\lambda_1\in\rho(\mathfrak{h})^*$，则 $\lambda=\lambda_1\circ\rho\in\mathfrak{h}^*$(即 λ 使右面的线性映射图为交换图)，而且



$$(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)\rho=a_1(\lambda_1\rho)+a_2(\lambda_2\rho),$$
$$\forall a_1,a_2\in\boldsymbol{C},\quad \lambda_1,\lambda_2\in\rho(\mathfrak{h})^*,$$
$$\lambda_1\rho=0,\text{当且仅当 }\lambda_1=0.$$

由此可知，可将 $\rho(\mathfrak{h})^*$视为 $\mathfrak{h}^*$的子空间，即将 $\lambda=\lambda_1\circ\rho$ 与 λ_1 等同起来.

定义 3.1.1 设(ρ,V)是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，并视 $\rho(\mathfrak{h})^*\subseteq\mathfrak{h}^*$，则称 V 对 $\rho(\mathfrak{h})$的权、权向量、权子空间、权子空间的直和分解为表示 ρ 对 $\mathfrak{h}$ 的**权、权向量、权子空**

间、权子空间的直和分解.

在不混淆时,则将"对 $\mathfrak{h}$"省去.

由定理 2.4.2 可知 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 为 ρ 的权,当且仅当存在对应于 λ 的权向量 v,即 $v\neq 0$,且

$$\rho(h)v=\lambda(h)v, \quad \forall h\in\mathfrak{h}.$$

一般复半单李代数的表示理论要用到复半单李代数的结构理论,因而只能以后讨论.

引理 3.1.2 设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\lambda\in\Delta}\mathfrak{g}_{\alpha}.$$

又(ρ,V)是 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示,V 对 $\mathfrak{h}$ 的权子空间的分解为

$$V=\sum_{\lambda\in\Delta_1}V_{\lambda},$$

Δ_1 是 V 对 $\mathfrak{h}$ 的所有权的集合(称为**权系**),则

1) 若 $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$,且$[h,X_\alpha]=\alpha(h)X_\alpha$, $\forall h\in\mathfrak{h}$,那么 $\rho(X_\alpha)V_\lambda\subseteq V_{\lambda+\alpha}$, $\forall\lambda\in\Delta_1$;

2) $\forall h\in\mathfrak{h}$,有 $\sum_{\lambda\in\Delta_1}\dim V_\lambda\cdot\lambda(h)=0$.

证 1) 首先,我们用归纳法证明

$$(\rho(h)-(\alpha(h)+\lambda(h))\mathrm{id}_V)^k\rho(X_\alpha)=\rho(X_\alpha)(\rho(h)-\lambda(h)\mathrm{id}_V)^k.$$

当 $k=1$ 时,

$$\begin{aligned}&(\rho(h)-(\alpha(h)+\lambda(h))\mathrm{id}_V)\rho(X_\alpha)\\&\quad=[\rho(h),\rho(X_\alpha)]+\rho(X_\alpha)\rho(h)-\alpha(h)\rho(X_\alpha)-\lambda(h)\rho(X_\alpha)\\&\quad=\rho(X_\alpha)(\rho(h)-\lambda(h)\mathrm{id}_V).\end{aligned}$$

设 k 时结论成立,则

$$\begin{aligned}&(\rho(h)-(\alpha(h)+\lambda(h))\mathrm{id}_V)^{k+1}\rho(X_\alpha)\\&\quad=(\rho(h)-(\alpha(h)+\lambda(h))\mathrm{id}_V)\rho(X_\alpha)(\rho(h)-\lambda(h)\mathrm{id}_V)^k\\&\quad=\rho(X_\alpha)(\rho(h)-\lambda(h)\mathrm{id}_V)^{k+1}.\end{aligned}$$

由此知结论 1)成立.

2) 由于 V_λ 是对 $\mathfrak{h}$ 的属于权 λ 的权子空间. 因而 $\mathrm{tr}\rho(h)=\sum_{\lambda\in\Delta_1}\dim V_\lambda\cdot\lambda(h)$. 另一方面,由于 $\mathfrak{g}$ 是半单的,故 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^{(1)}$. 由引理 2.7.1 知 $\mathrm{tr}\rho(h)=0$,故结论 2)成立. ▌

定理 3.1.3 设 3 维复单李代数 $\mathfrak{g}$ 有分解式(1). $e_\alpha,e_{-\alpha},\alpha=h_\alpha$ 如定理 3.1.1 所述. 又(ρ,V)为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示,则有 $\Lambda\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=\{x\alpha\,|\,x\in\boldsymbol{R}\}$使得

$$\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\boldsymbol{Z}_+=\boldsymbol{N}\cup\{0\},$$

且 V 有权子空间分解

$$V=\sum_{k=0}^{\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}}V_{\Lambda-k\alpha},\quad \dim V_{\Lambda-k\alpha}=1.$$

证 因为 $\dim V<\infty$,故一定有权 Λ 使得 $\Lambda+\alpha$ 不是权. 取 $v_\Lambda\in V_\Lambda, v_\Lambda\neq 0$,且 $\rho(h)=\Lambda(h)v_\Lambda$, $\forall h\in\mathfrak{h}$. 由引理 3.1.2 知 $\rho(e_{-\alpha})^k v_\Lambda\in V_{\Lambda-k\alpha}$,故有非负整数 p 使得

$$\rho(e_{-\alpha})^k v_\Lambda\neq 0,\ 0\leqslant k\leqslant p;\quad \rho(e_{-\alpha})^{p+1}v_\Lambda=0.$$

用归纳法容易证明

$$\rho(h)\rho(e_{-\alpha})^k=\rho(e_{-\alpha})^k(\rho(h)-k\alpha(h)\mathrm{id}_V),$$

即有

$$\rho(h)\rho(e_{-\alpha})^k v_\Lambda=(\Lambda-k\alpha)(h)\rho(e_{-\alpha})^k v_\Lambda.$$

又用归纳法可证明

$$\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})^k v_\Lambda=\mu_k\rho(e_{-\alpha})^{k-1}v_\Lambda,\tag{6}$$

其中

$$\mu_k=k\left(\Lambda-\frac{1}{2}(k-1)\alpha\right)(h_\alpha).\tag{7}$$

于是 $V_1=L(v_\Lambda,\rho(e_{-\alpha})v_\Lambda,\cdots,\rho(e_{-\alpha})^p v_\Lambda)$是 $\mathfrak{g}$ 的不变子空间,因而 $V_1=V, V_{\Lambda-k\alpha}=L(\rho(e_{-\alpha})^k v_\Lambda)$,维数为 1. 由引理 3.1.2 知

$$\sum_{k=0}^{p}(\Lambda-k\alpha)(h_\alpha)=0.$$

于是

$$\frac{2\Lambda(h_\alpha)}{\alpha(h_\alpha)}=p \text{ 即 } \frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p.$$

$$\Lambda=\frac{p}{2}\alpha\in\mathfrak{h}_R.$$

由此知定理 3.1.3 成立. ▌

推论 1 设(V,ρ)为 3 维复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示,Λ 如上述定理所述. 则表示 ρ 的权系为

$$\Lambda,\Lambda-\alpha,\cdots,-\Lambda \text{ 且 } \dim V=2\left(\Lambda+\frac{1}{2}\alpha,\alpha\right)\Big/(\alpha,\alpha).$$

证 $\Lambda-p\alpha=\frac{p}{2}\alpha-p\alpha=-\frac{1}{2}p\alpha=-\Lambda,$

$$\dim V=p+1=\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}+\frac{2(\alpha/2,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=2\left(\Lambda+\frac{1}{2}\alpha,\alpha\right)\Big/(\alpha,\alpha).$$ ▌

注 我们称 Λ 为 ρ 的**最高权**,v_Λ 为**最高权向量**. 这时规定 $\mathfrak{h}_R$ 以 α 为正方向.

推论 2 设 λ 是不可约表示(ρ,V)的一个权,则$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}$,且

$$w_\alpha\lambda=\lambda-\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

也是(ρ,V)的一个权.

证 设 Λ 为此表示的最高权,因而有 k 满足 $0\leqslant k\leqslant p$,使 $\lambda=\Lambda-k\alpha$. 于是

$$w_\alpha\lambda=\Lambda-k\alpha-\frac{2(\Lambda-k\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\Lambda-k\alpha-p\alpha+2k\alpha=\Lambda-(p-k)\alpha,$$

而 $0\leqslant p-k\leqslant p$,故 $w_\alpha\lambda$ 也是权,且$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}$. ▌

推论 3 设 λ 是不可约表示(ρ,V)的一个权,Λ 是(ρ,V)的最高权,则下列条件等价:

1) $\rho(e_\alpha)V_\lambda\neq 0$ $(\rho(e_{-\alpha})V_\lambda\neq 0)$;

2) $\lambda+\alpha$ 也是权 ($\lambda-\alpha$ 也是权);

3) $\lambda\neq\Lambda$ $(\lambda\neq-\Lambda)$.

括号中为 λ 的另一组等价条件.

推论 4 3维复单李代数的两个不可约表示(ρ_1,V_1),(ρ_2,V_2)同构的充分必要条件是它们有相同的最高权.

例 3.1.1 由于3维复单李代数$\mathfrak{g}$同构于$sl(2,C)$.于是可在$\mathfrak{h}$,$\mathfrak{g}_\alpha$与$\mathfrak{g}_{-\alpha}$中分别取元素h,e与f使得

$$[h,e]=2e,\quad [h,f]=-2f,\quad [e,f]=h.$$

设V为p次齐次二元多项式组成的线性空间,故V有基x^p,$x^{p-1}y^1,x^{p-2}y^2,\cdots,xy^{p-1},y^p$.定义$(\rho,V)$使得

$$\rho(e)x^sy^t=tx^{s+1}y^{t-1},\quad \rho(f)x^sy^t=sx^{s-1}y^{t+1},$$

$$\rho(h)x^sy^t=(s-t)x^sy^t,$$

则(ρ,V)是$\mathfrak{g}$的一个$p+1$维不可约表示.这就是有广泛用途的多项式表示.

习　题

1. 设h,e与f如同例3.1.1,试求(e,f).若α及Λ分别为$\mathfrak{g}$对$\mathfrak{h}$的根,(ρ,Λ)的最高权,试以h表示它们.

2. 设$(\rho_i,V_i)(i=1,2)$是复3维单李代数$\mathfrak{g}$的两个不可约表示,试证(ρ_1,V_1)与(ρ_2,V_2)的张量积完全可约.

§2 半单李代数的Cartan子代数

定理 3.2.1 复半单李代数$\mathfrak{g}$的子代数$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的Cartan子代数当且仅当$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的极大可换子代数,且$\forall x\in\mathfrak{h}$,ad$x$是半单的.

证 设$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的Cartan子代数,$\mathfrak{g}$对$\mathfrak{h}$的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha. \tag{1}$$

设$x\in\mathfrak{h}$,x_s,x_n分别为x的半单部分与幂零部分(参见定理2.2.3).由$(\mathrm{ad}x)^k\mathfrak{h}=0$,于是有$\mathrm{ad}x_s(\mathfrak{h})=0$,即$x_s\in C_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})\subseteq\mathfrak{h}$.故$x_n\in\mathfrak{h}$,因而$(x_n,\mathfrak{g}_\alpha)=0$, $\forall\alpha\in\Delta$.在$\mathfrak{g}$中取基,使ad$x$的矩阵为

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha(x) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha(x)\end{pmatrix},\cdots\right),\quad \forall x\in\mathfrak{h},$$

则 $\mathrm{ad}x_s$,$\mathrm{ad}x_n$ 在这组基下的矩阵分别为

$$\operatorname{diag}(0,\cdots,0,\alpha(x),\cdots,\alpha(x),\cdots),$$

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix},\cdots\right).$$

由此可知$(\mathfrak{h},x_n)=0$,因而$(x_n,\mathfrak{g})=0$. 但是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是非退化的,故 $x_n=0$,即 $x=x_s$. 于是 $\mathrm{ad}x$ 半单,$\mathfrak{h}$ 是可换的. 又 $\mathfrak{h}$ 是极大幂零的,因而是极大可换的.

反之,设 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大可换子代数,而且 $\forall x\in\mathfrak{h}$,$\mathrm{ad}x$ 是半单的. 设 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 的分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})+\sum_{\alpha\neq 0}\mathfrak{g}_\alpha(\mathrm{ad}\mathfrak{h}).$$

因而 $\forall x\in\mathfrak{h}$,有 $x\in\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})$,且

$$[x,\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})]=0.$$

若 $y\in\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})$,但 $y\overline{\in}\mathfrak{h}$,则 $\mathfrak{h}+L(y)\supset\mathfrak{h}$. 但 $\mathfrak{h}+L(y)$仍为交换子代数,这与 $\mathfrak{h}$ 的极大可换性矛盾. 故 $y\in\mathfrak{h}$,即 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\mathfrak{h})$为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. ▌

定理 3.2.2 设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的分解如(1)式,则

1) $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型限制在 $\mathfrak{h}$ 上是非退化的. $\forall\lambda\in\mathfrak{h}^*$,有唯一的 $h_\lambda\in\mathfrak{h}$ 使得

$$\lambda(h)=(h_\lambda,h),\quad \forall h\in\mathfrak{h},\tag{2}$$

$\mathfrak{h}^*$到 $\mathfrak{h}$ 的映射 $\lambda\to h_\lambda$ 是线性同构.

根系 Δ 线性生成 $\mathfrak{h}^*$,即 $L(\Delta)=\mathfrak{h}^*$.

2) 若 $\alpha\in\Delta$,则$-\alpha\in\Delta$,且

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = (X_\alpha, X_{-\alpha}) h_\alpha, \quad \forall X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, \tag{3}$$

$$\alpha(h_\alpha) = (h_\alpha, h_\alpha) \neq 0,$$

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1, \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

又若 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，且 $e_\alpha \neq 0$，则有唯一的 $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得

$$(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1. \tag{4}$$

证 1) 设 $h \in \mathfrak{h}$. 若 $(h, \mathfrak{h}) = 0$，从 $(h, \mathfrak{g}_\alpha) = 0$ $(\forall \alpha \in \Delta)$ 知 $(h, \mathfrak{g}) = 0$，故 $h = 0$. 因而 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{h}$ 上的限制是非退化的. 由线性代数理论知，$\forall \lambda \in \mathfrak{h}^*$，存在唯一的 $h_\lambda \in \mathfrak{h}$ 使得(2)式成立，而且 $\lambda \to h_\lambda$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 到 $\mathfrak{h}$ 的线性同构.

若 $L(\Delta) \neq \mathfrak{h}^*$. 于是有 $h \in \mathfrak{h}, h \neq 0$ 使得

$$\alpha(h) = 0, \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

于是有 $[h, \mathfrak{g}] = 0$，即 $h \in C(\mathfrak{g}) = \{0\}$. 这是不可能的. 故 $L(\Delta) = \mathfrak{h}^*$.

2) 设 $\alpha \in \Delta$. 由于 $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{h}) = 0$；$(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$，若 $\alpha + \beta \neq 0$. 因而有 $-\alpha \in \Delta$，且 $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$.

设 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. 于是 $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$，且 $\forall h \in \mathfrak{h}$，有

$$\begin{aligned}([X_\alpha, X_{-\alpha}], h) &= -(X_{-\alpha}, [X_\alpha, h]) \\ &= \alpha(h)(X_\alpha, X_{-\alpha}) = (h_\alpha, h)(X_\alpha, X_{-\alpha}).\end{aligned}$$

于是由结论 1) 知(3)式成立.

设 $\beta \in \Delta$，由引理 2.7.2 知有 $r_{\alpha\beta} \in \mathbf{Q}$ 使得

$$\beta(h_\alpha) = r_{\alpha\beta} \alpha(h_\alpha).$$

于是若 $\alpha(h_\alpha) = 0$，则 $\beta(h_\alpha) = 0$，$\forall \beta \in \Delta$. 再由结论 1) 知 $h_\alpha = 0, \alpha = 0$，矛盾. 故 $\alpha(h_\alpha) \neq 0$.

设 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, e_\alpha \neq 0$. 由于 $(e_\alpha, \mathfrak{h}) = 0$；$(e_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$，若 $\alpha + \beta \neq 0$. 故一定有 $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得(4)式成立. 若 $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$，则有 $e_\alpha' \in \mathfrak{g}_\alpha, e_\alpha' \neq 0$ 使得 $(e_\alpha', e_{-\alpha}) = 0$. 令

$$e_n = (\operatorname{ad} e_\alpha)^n e_\alpha', \quad n = 0, 1, \cdots.$$

于是有 $e_n \in \mathfrak{g}_{(n+1)\alpha}$，且用归纳法可证明

$$[e_{-\alpha}, e_n] = -\frac{1}{2} n(n+1) \alpha(h_\alpha) e_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

而由(3)

$$[e_{-\alpha},e_0]=[e_{-\alpha},e_\alpha']=(e_\alpha',e_{-\alpha})h_\alpha=0.$$

由 $e_0\neq 0,\alpha(h_\alpha)\neq 0$，知 $e_1\neq 0$，从而 $e_2\neq 0,\cdots,e_n\neq 0$. 故知 $|\Delta|=\infty$，这与 $\dim\mathfrak{g}<\infty$ 相矛盾. 由此知 $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$，$\forall\alpha\in\Delta$. 因而对 $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,e_\alpha\neq 0$，满足(4)式的 $e_{-\alpha}$ 是唯一的. ▌

注 由此定理的结论 1)，我们可用 $\lambda\to h_\lambda$ 将 $\mathfrak{h}^*$ 与 $\mathfrak{h}$ 等同起来，即 $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h},\lambda=h_\lambda$. 于是有 $\lambda(h)=(h_\lambda,h)=(\lambda,h)$. 特别 $\alpha,\beta\in\Delta$，我们有

$$\beta(h_\alpha)=(h_\beta,h_\alpha)=(\beta,\alpha)=r_{\alpha\beta}(\alpha,\alpha).$$

定义 3.2.1 设 Δ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系. 又 $\beta\in\Delta\cup\{0\},\alpha\in\Delta$. 若有非负整数 p,q，使得 $\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}\subseteq\Delta\cup\{0\}$，而 $\beta-(p+1)\alpha,\beta+(q+1)\alpha\overline{\in}\Delta\cup\{0\}$，则称 $\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$ 为**过 β 的 α-链**. 若将上面三处 $\Delta\cup\{0\}$ 代之以 Δ，则称 $\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$ 为**过 β 的 α-根链**.

定理 3.2.3 设 Δ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，$\beta\in\Delta\cup\{0\},\alpha\in\Delta$. 又 $\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$ 为过 β 的 α-链，则有

$$(\beta,\alpha)=\frac{1}{2}(p-q)(\alpha,\alpha),\tag{5}$$

且当 $k>q$ 或 $k<-p$ 时，均有 $\beta+k\alpha\overline{\in}\Delta\cup\{0\}$.

证 设 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的分解为(1)，$e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,e_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 满足(4)式. 于是 $\mathfrak{g}_1=L(\alpha,e_\alpha,e_{-\alpha})$ 是 3 维单李代数. $\mathfrak{g}$ 的伴随表示$(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$限制在 $\mathfrak{g}_1$ 上为 $\mathfrak{g}_1$ 的表示. 由定理的条件知

$$\tilde{\mathfrak{g}}=\sum_{k=-p}^{q}\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$$

是此表示的不变子空间. 由于 $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]=\mathfrak{g}_1$；$\beta+k\alpha\neq 0$ 时，$\dim\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}=1$；$\beta+k\alpha=0$ 时，$(\beta+k\alpha,\alpha)=0$ 知

$$\sum_{k=-p}^{q}(\beta+k\alpha,\alpha)=0,$$

因而

$$(\beta,\alpha)=\frac{1}{2}(p-q)(\alpha,\alpha).$$

由于$|\Delta|<\infty$，设$q'=\max\{k\mid\beta+k\alpha\in\Delta\cup\{0\}\}$．如果$q'>q$，考虑过$\beta_1=\beta+q'\alpha$的$\alpha$-链$\{\beta_1+k\alpha\mid -p_0\leqslant k\leqslant q_0\}$．显然$q_0=0$，$q'-p_0>q+1$，即

$$p_0<q'-q-1.$$

另一方面，由

$$(\beta+q'\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}p_0(\alpha,\alpha)$$

知$p_0=p-q+2q'$．于是

$$q'<-p-1.$$

这是不可能的．故$q'=q$．

同样可证$\min\{k\mid\beta+k\alpha\in\Delta\cup\{0\}\}=-p$． ▌

推论 若$\alpha,\beta\in\Delta$，则

$$\beta-\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\in\Delta. \tag{6}$$

证 设过β的α-链为$\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$，于是从(5)式得出$-2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)=q-p\in\mathbf{Z}$，且

$$-p\leqslant q-p\leqslant q.$$

于是$\beta-\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\in\Delta\cup\{0\}$．若$\beta\neq k\alpha$，则$\beta-\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\neq 0$；若$\beta=k\alpha$，则$\beta-\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=-\beta\neq 0$，故知(6)式成立． ▌

定理 3.2.4 设Δ为复半单李代数$\mathfrak{g}$对其Cartan子代数$\mathfrak{h}$的根系，则有以下结果：

1) 若$\alpha,\beta\in\Delta$，且$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\{0\}$，则$\alpha+\beta\overline{\in}\Delta$；

2) 若$\alpha\in\Delta,k\in\mathbf{C},k\alpha\in\Delta$，则$k=\pm 1$；

3) 若$X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,X_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha},X_\beta\in\mathfrak{g}_\beta$，则

$$[X_{-\alpha},[X_\alpha,X_\beta]]=\frac{1}{2}q(p+1)(X_\alpha,X_{-\alpha})(\alpha,\alpha)X_\beta,$$

其中 p,q 为过 β 的 α-链$\{\beta+k\alpha \mid -p\leqslant k\leqslant q\}$的两个端点对应的整数.

证 1) 设 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的分解如同(1)式. 又过 β 的 α-链为$\{\beta+k\alpha \mid -p\leqslant k\leqslant q\}$, $\mathfrak{g}_1=L(\alpha,e_\alpha,e_{-\alpha})$, 其中$(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$, $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $e_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$. 故 $\mathfrak{g}_1$ 为 3 维单李代数. 将 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示限制在 $\mathfrak{g}_1$ 上, 则为 $\mathfrak{g}_1$ 的表示. 由于$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\{0\}$, 于是 $\sum\limits_{k=0}^{p}\mathfrak{g}_{\beta-k\alpha}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的不变子空间. 因而有 $\sum\limits_{k=0}^{p}(\beta-k\alpha,\alpha)=0$. 故 $2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)=p$. 另一方面, 由(5)式我们知$2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha)=p-q$. 故 $q=0$, 即 $\alpha+\beta\overline{\in}\Delta$.

2) 由于$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\alpha]=\{0\}$, 故 $2\alpha\overline{\in}\Delta$. 由定理 3.2.3 知 $\forall k\in \boldsymbol{N}, k>1$, $k\alpha\overline{\in}\Delta$. 于是$-k\alpha\overline{\in}\Delta$, 即结论 2)对 $k\in\boldsymbol{Z}$ 成立.

设 $k\overline{\in}\boldsymbol{Z}$, 而 $k\alpha\in\Delta$. 设过 $k\alpha$ 的 α-链为$\{(k+k_1)\alpha \mid k_1=-p, -(p-1),\cdots,0,\cdots,q\}$. 于是由(5)知 $k=\dfrac{(k\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=\dfrac{1}{2}(p-q)$. 因为 $k\overline{\in}\boldsymbol{Z}$, 于是有 $k=n_1+\dfrac{1}{2}$, $n_1\in\boldsymbol{Z}$. 由 $k\alpha\in\Delta$, 知 $-k\alpha\in\Delta$, 即 $k\alpha-(2n_1+1)\alpha\in\Delta$. 故当 $n_1>0$ 时, 有$-p\leqslant-(2n_1+1)<-(n_1+1)<0\leqslant q$. 从而 $k\alpha-(n_1+1)\alpha=-\dfrac{1}{2}\alpha\in\Delta$, 故$\dfrac{1}{2}\alpha\in\Delta$. 当 $n_1=0$ 时, $\dfrac{1}{2}\alpha\in\Delta$; 当 $n_1<0$ 时, 有$-p\leqslant 0\leqslant-(n_1+1)<-(2n_1+1)\leqslant q$, 亦有$\dfrac{1}{2}\alpha\in\Delta$. 令 $\alpha_1=\dfrac{1}{2}\alpha$. 于是 $2\alpha_1\in\Delta$, 这不能成立. 故 $k\overline{\in}\boldsymbol{Z}$ 时, $k\alpha\overline{\in}\Delta$. 这样, 完成了结论 2)的证明.

3) 若 $X_\alpha, X_{-\alpha}$与 X_β 中有一个为 0, 上述结论自然成立. 故假设 $X_\alpha, X_{-\alpha}, X_\beta$ 全不为零. 由结论 1), 若 $\alpha,\beta\in\Delta$, $\alpha+\beta\in\Delta$, 则$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. 若 $\alpha=-\beta$, 则$[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]=\boldsymbol{C}\alpha$ 为一维线性空间, 由此可知 $X_{-\alpha}\neq0$, $X_\beta\neq0$, 则有唯一的 $e_{\beta+q\alpha}\in\mathfrak{g}_{\beta+q\alpha}$使得 $X_\beta=(\mathrm{ad}X_{-\alpha})^q e_{\beta+q\alpha}$. 而 $L((\mathrm{ad}X_{-\alpha})^k e_{\beta+q\alpha},\ k=0,1,\cdots,q+p)$ 构成的子空间为 $\mathfrak{g}_1=L(X_\alpha,X_{-\alpha},[X_\alpha,X_{-\alpha}])$的不可约表示. 由 § 3.1 之(6)式与(7)式我

们有

$$
\begin{aligned}
[X_{-\alpha},[X_\alpha,X_\beta]] &= [X_{-\alpha},[X_\alpha,(\mathrm{ad}X_{-\alpha})^q e_{\beta+q\alpha}]] \\
&= -(X_\alpha,X_{-\alpha})(\beta,\alpha)X_\beta+[X_\alpha,(\mathrm{ad}X_{-\alpha})^{q+1}e_{\beta+q\alpha}] \\
&= -(X_\alpha,X_{-\alpha})(\beta,\alpha)X_\beta+(X_\alpha,X_{-\alpha})(q+1)\left(\beta+q\alpha-\frac{1}{2}q\alpha,\alpha\right)X_\beta \\
&= \frac{1}{2}q(p+1)(X_\alpha,X_{-\alpha})(\alpha,\alpha)X_\beta. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

推论　若 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$，则 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

这是结论 1)的必然结果. ▌

习　题

1. 设 Δ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，试证

1) $\frac{1}{2}|\Delta|\in N$，且 $\frac{1}{2}|\Delta|\geqslant\dim\mathfrak{h}$；

2) $\frac{1}{2}|\Delta|=\dim\mathfrak{h}$ 当且仅当 $\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{1}{3}\dim\mathfrak{g}$，当且仅当 $\mathfrak{g}$ 是 $\dim\mathfrak{h}$ 个 3 维单李代数的直和.

3. 试证维数为 1,2,4,5 与 7 的复李代数不是半单李代数.

4. 试证 6 维复李代数不是单李代数.

5. 试证 8 维复半单李代数一定是单的，而 9 维复半单李代数一定是三个 3 维单李代数的直和.

§3　半单李代数的根系

设 Δ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系. 于是

$$
\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha, \tag{1}
$$

其中 $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$. $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 (x,y) 限制在 $\mathfrak{h}$ 上是非退化的. 于是对 $\forall\lambda\in\mathfrak{h}^*$，有唯一的 $h_\lambda\in\mathfrak{h}$ 使得 $\lambda(h)=(h_\lambda,h)$，$\forall h\in\mathfrak{h}$. $\lambda\to h_\lambda$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 到 $\mathfrak{h}$ 的线性同构映射. 故可将 $\mathfrak{h}^*$ 与 $\mathfrak{h}$ 等同起来. 于是可视 Δ 为 $\mathfrak{h}$ 的子集. 如果 $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，$e_{-\alpha}\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 且 $(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$，则 $[e_\alpha,e_{-\alpha}]=h_\alpha=\alpha$. 如果 $h,h'\in\mathfrak{h}$，则有

$$(h,h') = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}h\,\mathrm{ad}h') = \sum_{\alpha\in\Delta}\alpha(h)\alpha(h')$$
$$= \sum_{\alpha\in\Delta}(\alpha,h)(\alpha,h').$$

定理 3.3.1 设 Δ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系.

1) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\in\Delta$,且为 $\mathfrak{h}$ 的一组基,则 $\forall\alpha\in\Delta$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i,\quad k_i\in\boldsymbol{Q}.$$

2) 令 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 是 Δ 生成的实线性空间,即

$$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=\left\{\sum_{\alpha\in\Delta}x_\alpha\alpha\,\middle|\,x_\alpha\in\boldsymbol{R}\right\},$$

则

$$\dim\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=\dim\mathfrak{h};\quad \mathfrak{h}=\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}},$$

且 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型限制在 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 上是正定的. 故 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 对于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型成为一个 Euclid 空间.

证 1) 设 $\alpha,\beta\in\Delta$. 由于 $\alpha\in[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]$,故由引理 2.7.2 知有 $r_{\alpha\beta}\in\boldsymbol{Q}$ 使得

$$(\beta,\alpha)=r_{\alpha\beta}(\alpha,\alpha).$$

因而

$$(\alpha,\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta}(\beta,\alpha)(\beta,\alpha) = \left(\sum_{\beta\in\Delta}r_{\alpha\beta}^2\right)(\alpha,\alpha)^2.$$

又从定理 3.2.2 知 $(\alpha,\alpha)\neq0$,于是

$$(\alpha,\alpha) = \frac{1}{\sum_{\beta\in\Delta}r_{\alpha\beta}^2}\in\boldsymbol{Q},$$

且

$$(\alpha,\alpha)>0.$$

从而

$$(\beta,\alpha)\in\boldsymbol{Q},\quad \forall\alpha,\beta\in\Delta.$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\in\Delta$ 为 $\mathfrak{h}$ 的基,$\alpha\in\mathfrak{h}$,若有

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i,$$

于是 $k_1,k_2,\cdots,k_l$ 为线性方程组

$$\sum_{i=1}^{l} x_i(\alpha_i,\alpha_j) = (\alpha,\alpha_j), \quad j = 1,2,\cdots,l$$

的解. 由于(α_i,α_j),$(\alpha,\alpha_j)\in \boldsymbol{Q}$,故 $k_i\in \boldsymbol{Q}$.

2) 由结论 1)知若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\in\Delta$ 为 $\mathfrak{h}$ 的基,也是 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$的基,于是 $\dim\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=\dim\mathfrak{h}$,$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}+\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$. 设 $h\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$,显然$(h,\alpha)\in\boldsymbol{R}$. 又

$$(h,h) = \sum_{\alpha\in\Delta}(\alpha,h)^2 \geqslant 0.$$

若上式中等号成立,则$(\alpha,h)=0$, $\forall\alpha\in\Delta$. 故 $h=0$,因而结论 2)成立. ▌

由这个定理知 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$为 Euclid 空间. 故对 $h,h'\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$,可以定义它们的夹角,记为$\langle h,h'\rangle$.

定理 3.3.2 设 Δ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系. $\alpha,\beta\in\Delta$,且 $\alpha=\pm\beta$,则

$$|\cos\langle\alpha,\beta\rangle| = \frac{1}{2}\sqrt{r}, \quad r=0,1,2,3.$$

且若 $r\neq 0$,又$(\alpha,\alpha)\leqslant(\beta,\beta)$,则

$$\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=r, \quad \left|\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\right|=r, \quad \left|\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\right|=1.$$

证 设过 β 的 α-链为$\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$. 由定理 3.2.3 知

$$\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q\in\boldsymbol{Z}.$$

同理$\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\in\boldsymbol{Z}$. 于是$\dfrac{4(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}=r\in\boldsymbol{Z}_+$.

另一方面 $\alpha\neq\pm\beta$,故 $\alpha\neq k\beta$, $\forall k\in\boldsymbol{R}$,于是$|\cos\langle\alpha,\beta\rangle|<1$. 而

$$|\cos\langle\alpha,\beta\rangle| = \left(\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{r},$$

故 $r=0,1,2,3$.

设 $r\neq 0$,$(\alpha,\alpha)\leqslant(\beta,\beta)$. 由于

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\cdot\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=r,$$

于是

$$\left|\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\right| \geqslant \left|\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\right|.$$

由 $r=1,2,3$ 知

$$\left|\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\right| = r, \quad \left|\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\right| = 1,$$

因而

$$(\beta,\beta)/(\alpha,\alpha) = r. \quad \blacksquare$$

这个定理说明当 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha\neq\pm\beta,(\alpha,\beta)\neq 0$ 时，α 与 β 间的夹角与长度比有密切关系. 如下表：

$\langle\alpha,\beta\rangle$	$30°$	$45°$	$60°$	$120°$	$135°$	$150°$
$\lvert\beta\rvert/\lvert\alpha\rvert$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

下面的定理是用 Δ 来判断一个复半单李代数何时是单李代数.

定理 3.3.3 设 Δ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，则 $\mathfrak{g}$ 不为单李代数的充分必要条件是存在 Δ 的非空子集 Δ_1,Δ_2 满足：

$$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2;\quad (\Delta_1,\Delta_2)=0.$$

证 *必要性* 若 $\mathfrak{g}$ 不是单的，则 $\mathfrak{g}$ 有非平凡理想 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ 使得

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2.$$

由定理 2.6.2 知 $\mathfrak{h}$ 也有分解

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\oplus\mathfrak{h}_2,$$

其中 $\mathfrak{h}_i$ 为 $\mathfrak{g}_i$ 的 Cartan 子代数. 设 $\mathfrak{g}_i$ 对 $\mathfrak{h}_i$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}_i=\mathfrak{h}_i+\sum_{\alpha\in\Delta_i}\mathfrak{g}_{i\alpha}.$$

由于 $\mathfrak{g}_i$ 的 Killing 型为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{g}_i$ 上的限制，$(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)=0$，$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]=\{0\}$. 因而若 $\alpha\in\Delta_i,h\in\mathfrak{h},h=h_1+h_2,h_i\in\mathfrak{h}_i$，则 $\forall e_\alpha\in\mathfrak{g}_{i\alpha}$ 有

$$[h,e_\alpha]=[h_1,e_\alpha]+[h_2,e_\alpha]=(\alpha,h_i)e_\alpha,$$

即 $\mathfrak{g}_{i\alpha}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根子空间. 于是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \sum_{\alpha \in \Delta_1 \cup \Delta_2} \mathfrak{g}_\alpha.$$

故知 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, (\Delta_1, \Delta_2) = 0$.

充分性 设有 Δ 的非空子集 Δ_1, Δ_2 满足所述条件，显然 $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$. 令 $\mathfrak{h}_i$ 为 Δ_i 张成的子空间. 再令

$$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i + \sum_{\alpha \in \Delta_i} \mathfrak{g}_\alpha,$$

于是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$ 为空间直和.

设 $\alpha \in \Delta_1$，于是 $(-\alpha, \alpha) = -(\alpha, \alpha) < 0$，故 $-\alpha \in \Delta_1$，因而有 $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{g}_1$. 故 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbf{C}\alpha \subset \mathfrak{g}_1$. 又若 $\alpha, \beta \in \Delta_1$，于是 $(\alpha+\beta, \Delta_2) = 0$. 若 $\alpha+\beta \in \Delta$，则 $\alpha+\beta \in \Delta_1$，因而 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \subseteq \mathfrak{g}_1$. 显然 $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{g}_\alpha] = \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}_1$，因而 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数.

其次，我们证明 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 设 $\alpha \in \Delta_1, \beta \in \Delta_2$，而 $\alpha+\beta \in \Delta$. 因为 $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$，不妨假定 $\alpha+\beta \in \Delta_1$. 于是 $(\alpha+\beta, \Delta_2) = 0$，故 $(\beta, \Delta_2) = 0$，从而 $(\beta, \Delta) = 0$. 这与 $\beta \in \Delta_2$ 矛盾. 故得到 $\alpha+\beta \notin \Delta$，即有 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = 0$. 注意到 $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$，故 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想. 于是 $\mathfrak{g}$ 不是半单的. ▌

注 在充分性的证明中不难看出 $\mathfrak{g}_2$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想，且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

推论 设 Δ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，Δ_0 是 Δ 的极大线性无关部分组. 若 Δ_0 不能分解为两个非空的，相互正交的子集之和，则 $\mathfrak{g}$ 是单李代数.

证 若 $\mathfrak{g}$ 不是单的，则 Δ 有分解

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad (\Delta_1, \Delta_2) = 0, \quad \Delta_i \neq \varnothing.$$

于是有

$$\Delta_0 = (\Delta_0 \cap \Delta_1) \cup (\Delta_0 \cap \Delta_2);$$
$$(\Delta_0 \cap \Delta_1, \Delta_0 \cap \Delta_2) = 0.$$

由假设知 $\Delta_0 \cap \Delta_1$ 与 $\Delta_0 \cap \Delta_2$ 中有一个为空集，不妨设 $\Delta_0 \cap \Delta_2 = \varnothing$，于是 $\Delta_0 \subseteq \Delta_1$，故 $(\Delta_0, \Delta_2) = 0$. 但 Δ_0 为 $\mathfrak{h}$ 的基，故 $\Delta_2 = \varnothing$，矛盾. 因

而 $\mathfrak{g}$ 是单李代数.

习　题

1. 设 Δ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，$\alpha,\beta\in\Delta$，且 $\alpha\neq\pm\beta$. 试证

1) $(\alpha,\beta)>0$，则 $\alpha-\beta\in\Delta$；

2) $(\alpha,\beta)<0$，则 $\alpha+\beta\in\Delta$；

3) 过 β 的 α-链至多包含 4 个根.

2. 证明 $so(5,\boldsymbol{C})$ 是单李代数，在其根系中有一极大线性无关部分组 Δ_0 可分解为两个相互正交的子集之和. 又有另一极大线性无关部分组不能分解为两个相互正交的子集之和.

3. 试证习题 2 的结论对 $sp(2,\boldsymbol{C})$ 亦成立.

§4　素　根　系

本节我们将讨论根系 Δ 中一类特殊的极大线性无关部分组，也就是 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 或 $\mathfrak{h}$ 的一类特殊的基，其元素间的关系足以刻画半单李代数.

设 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系 Δ 生成的实线性空间，$\dim\mathfrak{h}=\dim\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=n$.

定义 3.4.1　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 的一组基. 又假设 $x\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$，$x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$. 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中第一个非零数是正数，则称 x 为**正向量**，记为 $x>0$. 若 $-x$ 为正向量，则称 x 为**负向量**，记为 $0>x$ 或 $x<0$.

若 $x-y>0$，则记 $x>y$ 或 $y<x$. 显然“$>$”是 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 中的一个关系，它满足下面一些性质：

1) $\forall x,y\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$，$x>y$，$x=y$ 与 $y>x$ 中有且只有一种成立.

2) $x>y$，$y>z$ 时，$x>z$.

3) $x,y,z\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}},a\in\boldsymbol{R}$. 又 $x>y$,则

$$x+z>y+z;$$

$$ax>ay,\quad 若\ a>0;$$

$$ay>ax,\quad 若\ a<0.$$

4) $x>0$ 当且仅当 $-x<0$.

这样 $\mathfrak{h}_R$ 对于"$>$"定义了一种次序,称为 $\mathfrak{h}_R$ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的**字典序**.

引理 3.4.1 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_p$ 是 $\mathfrak{h}_R$ 中 p 个正向量而且当 $i\neq j$ 时,$(\eta_i,\eta_j)\leqslant 0$. 则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_p$ 是线性无关的.

证 当 $p=1$ 时,$\eta_1>0$,故 η_1 是线性无关的. 现设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{p-1}$ 线性无关. 若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_p$ 线性相关,则有 $a_1,a_2,\cdots,a_{p-1}\in\boldsymbol{R}$,使得

$$\eta_p=\sum_{i=1}^{p-1}a_i\eta_i.$$

令

$$y=\sum_{a_i>0}a_i\eta_i,\quad z=\sum_{a_j<0}a_jx_j.$$

由 $\eta_p>0$,知 $y\neq 0$,且 $\eta_p=y+z$. 显然,

$$\begin{aligned}(y,\eta_p)&=(y,y)+(y,z)\\&=(y,y)+\sum_{a_i>0}\sum_{a_j<0}a_ia_j(\eta_i,\eta_j)\\&\geqslant(y,y)>0.\end{aligned}$$

但是

$$(y,\eta_p)=\sum_{a_i>0}a_i(\eta_i,\eta_p)\leqslant 0,$$

这就导出矛盾. 故 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_p$ 线性无关. ▌

在 $\mathfrak{h}_R$ 中取定一个字典序之后,取 $\alpha\in\Delta$. 若 α 为正向量,则称 α 为**正根**;α 为负向量,则称 α 为**负根**. 所有正根的集合 $\Delta_+=\{\alpha\in\Delta\mid\alpha>0\}$ 称为**正根系**,所有负根的集合 $\Delta_-=\{\alpha\in\Delta\mid\alpha<0\}$ 称为**负根系**. 显然

$$\Delta_+\cap\Delta_-=\varnothing,\quad\Delta_+\cup\Delta_-=\Delta,$$

$$\Delta_- = -\Delta_+ = \{-\alpha \mid \alpha \in \Delta_+\}.$$

定义 3.4.2 如果正根 α 不能表示为两个正根之和，则称 α 为**素根**. 所有素根的集合 Π 称为**素根系**.

定理 3.4.2 设 Δ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系. Π 是对 $\mathfrak{h}_R$ 一字典序的素根系，则有以下结论：

1) 若 $\alpha, \beta \in \Pi$，则 $\alpha - \beta \overline{\in} \Pi$；

2) 若 $\alpha, \beta \in \Pi$，且 $\alpha \neq \beta$，则

$$-3 \leqslant \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \leqslant 0;$$

3) 若 $\varphi \in \Delta_+$，则

$$\varphi = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha, \quad k_\alpha \in \mathbf{Z}_+;$$

4) $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 为 $\mathfrak{h}_R$ 的基，故也是 $\mathfrak{h}$ 的基；

5) 若 $\varphi \in \Delta_+ - \Pi$，则存在 $\alpha_i \in \Pi$，使得

$$\varphi - \alpha_i \in \Delta_+.$$

证 1) 设 $\alpha, \beta \in \Pi$，$\gamma = \alpha - \beta \in \Delta$，不妨设 $\gamma \in \Delta_+$. 于是 $\alpha = \gamma + \beta$，即 α 为二正根之和，这与 $\alpha \in \Pi$ 矛盾. 故 $\alpha - \beta \overline{\in} \Delta$.

2) 设过 β 的 α-链为 $\{\beta + k\alpha \mid -p \leqslant k \leqslant q\}$. 由结论 1)知 $p = 0$，因而由定理 3.2.3 知

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = -q \leqslant 0.$$

再由定理 3.3.2 知 $|-q| = 0, 1, 2, 3$. 故结论 2)成立.

3) 不妨设 $\varphi \in \Delta_+ - \Pi$，故有

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi_i \in \Delta_+, i = 1, 2,$$

显然 $\varphi > \varphi_i$. 若 $\varphi_i \in \Delta_+ - \Pi$，则可将 φ_i 继续分解. 由于 Δ_+ 为有限集，因此这种分解只能进行有限步. 于是有 $k_\alpha \in \mathbf{Z}_+, \alpha \in \Pi$ 使得

$$\varphi = \sum_{\alpha \in \Pi} k_\alpha \alpha.$$

4) 设 $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi, \alpha_i \neq \alpha_j$. 由结论 2)知 $(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0$. 又 α_i 是正向量，故由引理 3.4.1 知 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是线性无关的. 由结论 3)

知，Δ 中任何向量都是 Π 中向量的线性组合，故 Π 为 $\mathfrak{h}_R$ 的基，也为 $\mathfrak{h}$ 的基.

5）设 $\varphi\in\Delta_+-\Pi$. 如果

$$(\varphi,\alpha_i)\leqslant 0,\quad \forall\alpha_i\in\Pi,$$

则由引理 3.4.1 知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\varphi$ 是线性无关的，这与结论 4）矛盾. 因而有 $\alpha_i\in\Pi$，使得

$$(\varphi,\alpha_i)>0.$$

设过 φ 的 α_i-链为 $\{\varphi+k\alpha_i\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$，则

$$\frac{2(\varphi,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=p-q>0,$$

故 $p>0$，因而 $\varphi-\alpha_i\in\Delta$. 若 $\varphi-\alpha_i<0$，则 $\alpha_i=\varphi+(\alpha_i-\varphi)$，这与 α_i 是素根相矛盾. 故 $\varphi-\alpha_i\in\Delta_+$. ▌

由这个定理很自然引入下面的概念.

定义 3.4.3 设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系为 Δ. Δ_+，$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 分别为某种次序下的正根系，素根系. $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\alpha_i\in\Delta_+$. 称 $\mathrm{ht}\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i$ 为 α 的**高度**.

显然，$\alpha\in\Pi$ 当且仅当 $\mathrm{ht}\alpha=1$.

复半单李代数何时为单李代数可由它的素根系来判断，为此引进下面的概念.

定义 3.4.4 若素根系 Π 不能分解为两个非空的相互正交的子集之和，则称 Π 为**不可约素根系**，否则称 Π 是**可约的**.

定理 3.4.3 设 Δ 为半单李代数 $\mathfrak{h}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，Π 是某种次序下的素根系，则 $\mathfrak{g}$ 为单李代数当且仅当 Π 是不可约的.

证 若 Π 是不可约的，则由定理 3.3.3 的推论知 $\mathfrak{g}$ 是单李代数.

设 Π 是可约的，即有 $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$，$(\Pi_1,\Pi_2)=0$，$\Pi_i\neq\varnothing$. 令

$$\Delta_i=\Delta\cap L(\Pi_i)=\left\{\sum_{\alpha\in\Pi}k_\alpha\alpha\in\Delta\,|\,k_\alpha=0,\alpha\overline{\in}\Pi_i\right\},$$

显然，$(\Delta_1,\Delta_2)=0$；$\Delta_i\supseteq\Pi_i\neq\varnothing$. 若能证明

$$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2,$$

则由定理 3.3.3 知 $\mathfrak{g}$ 不是单李代数.

设 $\alpha\in\Delta_+$，若 $\mathrm{ht}\alpha=1$，则 $\alpha\in\Delta_1\cup\Delta_2$. 假设 $\mathrm{ht}\alpha=n$ 时，有 $\alpha\in\Delta_1\cup\Delta_2$. 而 $\beta\in\Delta_+$，$\mathrm{ht}\beta=n+1$. 由定理 3.4.2 的结论 5)知有 $\alpha_i\in\Pi$ 使得 $\beta-\alpha_i\in\Delta_+$. 显然 $\mathrm{ht}(\beta-\alpha_i)=n$. 故不妨设 $\beta-\alpha_i\in\Delta_1$. 于是有 $\beta-\alpha_i=\sum\limits_{\alpha\in\Pi_1}k_\alpha\alpha, k_\alpha\geqslant0, \sum k_\alpha=n$. 由定理 3.4.2 的结论 3)知 $\alpha_i\in\Pi_2$ 时，$(\beta-\alpha_i)-\alpha_i=\sum\limits_{\alpha\in\Pi_1}k_\alpha\alpha-\alpha_i\overline{\in}\Delta$；且 $(\beta-\alpha_i,\alpha_i)=0$. 因而过 $\beta-\alpha_i$ 的 α_i-链为 $\{\beta-\alpha_i\}$，即 $(\beta-\alpha_i)+\alpha_i=\beta\overline{\in}\Delta$，这与 $\beta\in\Delta$ 矛盾. 故 $\alpha_i\overline{\in}\Pi_2$，即 $\alpha_i\in\Pi_1$，因此 $\beta\in\Delta_1$. 由此可知 $\Delta_+\subset\Delta_1\cup\Delta_2$，注意 $-\Delta_i=\Delta_i$，$-\Delta_+=\Delta_-$，故 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$. ▌

推论 设素根系 Π 有非空的相互正交的不可约子集分解 $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2\cup\cdots\cup\Pi_k$，$(\Pi_i,\Pi_j)=0, i\neq j$. 又设 $\mathfrak{g}_i$ 为 $\{\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}\mid\alpha\in\Pi_i\}$ 生成的子代数，则 $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的单理想，且 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解：

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k.$$

证 由定理 3.4.3 的证明易知

$$\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\cup\Delta_k,$$

$$\Delta_i=\Delta\cap L(\Pi_i),\quad i=1,2,\cdots,k.$$

由定理 3.3.3 知，

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k,$$

其中 $\mathfrak{g}_i$ 是由 $\{\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}\mid\alpha\in\Delta_i\}$ 生成的李代数.

由定理 3.4.2 的结论 3)和 5)知 $\varphi\in\Delta_i$，有 $\alpha\in\Pi$ 使得 $\varphi-\alpha$(或 $\varphi+\alpha$)仍为根，且 $\alpha\in\Pi_i$. 于是 $\mathfrak{g}_i$ 也是 $\{\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}\mid\alpha\in\Pi_i\}$ 生成的子代数. 再由定理 3.3.3 知推论成立. ▌

下面的定理是关于复单李代数的高度最大的正根，即所谓**最高根**(**首根**)的性质.

定理 3.4.4 设 Π 是复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系，Δ_+ 为正根系，α

$\in \Delta_+$,则 α 关于下列条件等价:

1) $\mathrm{ht}\alpha=\max\{\mathrm{ht}\beta \mid \beta\in\Delta_+\}$;

2) $\alpha+\alpha_i \overline{\in} \Delta$, $\forall \alpha_i\in \Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$;

3) $\alpha+\beta \overline{\in} \Delta$, $\forall \beta\in\Delta_+$;

4) 若 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i, \beta \in \Delta, \beta = \sum_{i=1}^{n} l_i\alpha_i$,则

$$k_i-l_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n;$$

5) $\alpha\geqslant\beta$, $\forall\beta\in\Delta$.

证 1) $\Longrightarrow$ 2) 若 $\alpha+\alpha_i\in\Delta$,则 $\mathrm{ht}(\alpha+\alpha_i)=\mathrm{ht}\alpha+1$. 这与条件 1)矛盾.

2) $\Longrightarrow$ 3) $\mathrm{ht}\beta=1$,即为条件 2). 设 $\mathrm{ht}\beta=k$ 时,条件 3)成立,即 $\alpha+\beta\overline{\in}\Delta$. 若 $\mathrm{ht}\beta=k+1$,则由定理 3.4.2 知有 $\alpha_i\in\Pi$,使得$\beta-\alpha_i=\beta_1\in\Delta_+$. 于是 $\mathrm{ht}\beta_1=k$,因而 $\alpha+\beta_1,\alpha+\alpha_i\overline{\in}\Delta$. 于是

$$\begin{aligned}[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]&=[\mathfrak{g}_\alpha,[\mathfrak{g}_{\beta_1},\mathfrak{g}_{\alpha_i}]]\\&=[[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{\beta_1}],\mathfrak{g}_{\alpha_i}]+[\mathfrak{g}_{\beta_1},[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{\alpha_i}]]=\{0\},\end{aligned}$$

故 $\alpha+\beta\overline{\in}\Delta$,由此知条件 3)成立.

3) $\Longrightarrow$ 2) 这是显然的.

2) $\Longrightarrow$ 4) 由条件 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i$,首先证明 $k_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 若不然,令 $\Pi_1=\{\alpha_i\in\Pi \mid k_i>0\}$,$\Pi_2=\{\alpha_j\in\Pi \mid k_j=0\}$,于是有

$$\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2,\quad \Pi_1\cap\Pi_2=\varnothing.$$

设 $\alpha_j\in\Pi_2$,则

$$(\alpha,\alpha_j) = \sum_{i=1}^{n} k_i(\alpha_i,\alpha_j) = \sum_{\alpha_i\in\Pi_1} k_i(\alpha_i,\alpha_j) \leqslant 0.$$

另一方面由 $\alpha+\alpha_j\overline{\in}\Delta$,于是由定理 3.2.3 知

$$(\alpha,\alpha_j)\geqslant 0,$$

因而

$$(\alpha,\alpha_j)=\sum_{\alpha_i\in\Pi_1} k_i(\alpha_i,\alpha_j)=0,$$

即有

$$(\alpha_i,\alpha_j)=0,\quad \alpha_i\in\Pi_1,\quad \alpha_j\in\Pi_2.$$

由于 $\mathfrak{g}$ 是单李代数，Π 是不可约的，故 $\Pi_2=\varnothing$.

其次，我们证明满足条件 2)的正根 α 是唯一的. 如果设 $\alpha'=\sum_{i=1}^{n}k_i'\alpha_i\in\Delta_+$ 也满足条件 2)，故 $k_i'>0(i=1,2,\cdots,n)$. 由 $\alpha\neq0,\alpha'\neq0$，故有 α_i 使得

$$(\alpha,\alpha_i)>0.$$

由于 $\alpha+\alpha_j\overline{\in}\Delta$，故$(\alpha,\alpha_j)\geqslant0(j=1,2,\cdots,n)$. 因而

$$(\alpha,\alpha')=\sum_{j=1}^{n}k_j'(\alpha,\alpha_j)\geqslant k_i'(\alpha,\alpha_i)>0.$$

由此可知，若 $\alpha-\alpha'\neq0$，则由 $\alpha+\alpha'\overline{\in}\Delta$，因而 $\pm(\alpha-\alpha')\in\Delta$. 不妨设 $\beta=\alpha-\alpha'\in\Delta_+$，于是 $\alpha=\alpha'+\beta$. 但 α' 满足条件 2)，因而满足条件 3)，即 $\alpha=\alpha'+\beta\overline{\in}\Delta$，这与 $\alpha\in\Delta$ 矛盾，故 $\alpha=\alpha'$.

最后证明由条件 2) 推出条件 4). 不妨假设 $\beta=\sum_{i=1}^{n}l_i\alpha_i\in\Delta_+$，即 $l_i\geqslant0$，且 $\beta\neq\alpha$. 于是有 $\alpha_{i_1}\in\Pi$，使得 $\beta+\alpha_{i_1}\in\Delta_+$. 若 $\beta+\alpha_{i_1}\neq\alpha$，则有 $\alpha_{i_2}\in\Pi$，使得 $\beta+\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}\in\Delta_+$，$\cdots$ 如此继续下去，注意到 $|\Delta_+|<\infty$，故可得 Δ_+ 中序列

$$\beta,\beta+\alpha_{i_1},\cdots,\beta+\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}=\alpha,$$

故有

$$\alpha-\beta=\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}.$$

从而 $k_i-l_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)$，即条件 4) 成立.

4) $\Longrightarrow$ 1) 若 $\beta=\sum_{i=1}^{n}l_i\alpha_i\in\Delta_+$. 由条件 4) 知 $l_i\leqslant k_i(i=1,2,\cdots,n)$. 于是 $\mathrm{ht}\beta\leqslant\mathrm{ht}\alpha$，即条件 1) 成立.

4) $\Longrightarrow$ 5) 这是显然的.

5) $\Longrightarrow$ 2) 由于 $\alpha+\alpha_i>\alpha$，故 $\alpha+\alpha_i\overline{\in}\Delta$，即条件 2) 成立. ▌

推论 复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的最高根 α 是唯一的，且若 $\beta\in\Delta_+$，

$\beta \neq \alpha$，则有 Δ_+ 中的序列

$$\alpha, \alpha - \alpha_{i_k}, \alpha - \alpha_{i_k} - \alpha_{i_{k-1}}, \cdots, \alpha - \alpha_{i_k} - \alpha_{i_{k-1}} - \cdots - \alpha_{i_1} = \beta.$$

事实上，我们在证明定理 3.4.4 时已经证明了上述结论.

与素根系 Π 密切相关的是Cartan 矩阵. 将Cartan 矩阵的概念推广为所谓的广义 Cartan 矩阵在Kac-Moody 代数(一类无限维李代数) 中是极基本而又重要的概念.

定义 3.4.5 设 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 为半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系. 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2(\alpha_1,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} & \frac{2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} & \cdots & \frac{2(\alpha_1,\alpha_n)}{(\alpha_n,\alpha_n)} \\ \frac{2(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} & \frac{2(\alpha_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} & \cdots & \frac{2(\alpha_2,\alpha_n)}{(\alpha_n,\alpha_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2(\alpha_n,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} & \frac{2(\alpha_n,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} & \cdots & \frac{2(\alpha_n,\alpha_n)}{(\alpha_n,\alpha_n)} \end{pmatrix}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Cartan 矩阵**.

关于 Cartan 矩阵的一些基本性质可参看本节的习题 4.

习　　题

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{E}^n$ 中 k 个非零向量，且 $(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0, i \neq j$. 试问：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是否线性无关?

2. 设 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\} (l \geqslant 2)$ 为不可约素根系，α 为最高根. 试证$(-\alpha, \alpha_i) \leqslant 0\ (1 \leqslant i \leqslant l)$，且有 $\alpha_{i_0} \in \Pi$ 使得$(-\alpha, \alpha_{i_0}) < 0$.

3. 设单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$，$\alpha$ 为最高根，$e_{-\alpha}, e_{\alpha_i}$ 分别为 $\mathfrak{g}_{-\alpha}, \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ 中非零向量. 试证 $\mathfrak{g}$ 由 $e_{-\alpha}, e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_l}$ 生成.

4. 设矩阵 A 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的Cartan 矩阵，试证 A 有下面性质：

1) $\mathrm{ent}_{ii} A = 2, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$

2) $i \neq j$ 时，$\text{ent}_{ij}A \in \mathbf{Z}_-$.

3) $\text{ent}_{ij}A = 0$ 当且仅当 $\text{ent}_{ji}A = 0$.

4) 有对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，$d_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，使得 AD 为正定对称矩阵.

5) A 的所有顺序主子式 $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$.

6) $\mathfrak{g}$ 为单李代数的充分必要条件是不存在置换矩阵 P 使得 PAP' 为准对角矩阵.

注 如果一个 n 阶方阵 A 满足性质 1)—3)，则称 A 为**广义 Cartan 矩阵**.

§5 Dynkin 图

本节总假定 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系. 于是 Π 可以分解为两两正交的子集的和，而其中每个子集不能再分解：

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \cdots \cup \Pi_k; \quad (\Pi_i, \Pi_j) = 0, i \neq j. \tag{1}$$

自然，Π 的这种分划一定导出 Π 中的一个等价关系，每个 Π_i 为一个等价类. 这个等价关系可以用下述方法来建立.

设 $\alpha, \beta \in \Pi$. 如果存在 Π 中序列

$$\alpha = \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m} = \beta$$

使得 $(\alpha_{i_j}, \alpha_{i_{j+1}}) \neq 0$ $(j = 1, 2, \cdots, m-1)$，则称 α 与 β 有关系 $\sim$，记为 $\alpha \sim \beta$.

显然，关系 $\sim$ 有下面的性质：

1) $\alpha \sim \alpha$;

2) 若 $\alpha \sim \beta$，则 $\beta \sim \alpha$;

3) 若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$，则 $\alpha \sim \gamma$，

即 $\sim$ 是等价关系. 同一个等价类不能分解为两个相互正交的子集之和；不同等价类是相互正交的，即这个等价关系所对应的分划，

恰为 Π 的分划(1).

定义 3.5.1 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个素根系,以 l 个点分别表示 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$,将第 i 点与第 j 点用

$$\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\cdot\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=r_{ij}$$

条线段连接起来.若 $(\alpha_i,\alpha_i)<(\alpha_j,\alpha_j)$,则画一个从第 j 点指向第 i 点的箭头.如此得到的图形称为 Π(或 $\mathfrak{g}$) 的 **Dynkin 图**.

显然,若 Π 有分解(1),则 Π 的 Dynkin 图分解为 k 个互不相连的连通分支.

如果知道了 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵,自然可以知道对应的 Dynkin 图.反之,知道了 Dynkin 图,也容易写出 Cartan 矩阵.下面我们将讨论不可约素根系的 Dynkin 图.为此我们将素根系的性质抽象为有序 Euclid 空间向量组的性质,暂时不考虑它与李代数的联系.

定义 3.5.2 设 E 是 l 维有序(字典序)Euclid 空间,$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 E 的一个正向量组,且当 $i\neq j$ 时,$2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_i,\alpha_i)\in\boldsymbol{Z}_-$.我们称 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 为 E 的一个 **π-系**.

以下四个结论是显然的.

1) Π 是线性无关组,故 $n\leqslant l$;Π 也是 E 的子空间 $L(\Pi)$ 的 π-系;$n=l$ 时,Π 为 E 的基.

2) Π 的任何子集 Π_1 也是 π-系.

3) 若 $\alpha,\beta\in\Pi,\alpha\neq\beta$,则

$$0\leqslant\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\cdot\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\leqslant 3.$$

4) 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系 Π 是 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 的 π-系.

定义 3.5.3 若 π-系 Π 不能分解为两个相互正交的非空子集之和,称 Π 是**不可约 π-系**.

显然,不可约素根系是不可约 π-系.

用定义 3.5.1 中构造素根系的 Dynkin 图的同样的方法,对于每个 π-系 Π,我们也可以构造一个图,也称为 Π 的 **Dynkin 图**.

显然，π-系 Π 是不可约的当且仅当它的 Dynkin 图是连通的.

若 Π_1 为 Π 的子集，则 Π_1 的 Dynkin 图是将 Π 的 Dynkin 图中表示 Π_1 中元素的各点及其相互连接的线段保留，而将其余点及线都去掉得到的图. 我们也称 Π_1 的 Dynkin 图为 Π 的 Dynkin 图的子图.

引理 3.5.1 π-系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 的 Dynkin 图中互相连接的点对的数目 $\leqslant n-1$.

证 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i,\alpha_i)^{-1/2}\alpha_i\neq 0.$$

于是有

$$\begin{aligned}(\alpha,\alpha)&=n+\sum_{i\neq j}(\alpha_i,\alpha_i)^{-1/2}(\alpha_j,\alpha_j)^{-1/2}(\alpha_i,\alpha_j)\\&=n+\sum_{i<j}\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)^{1/2}(\alpha_j,\alpha_j)^{1/2}}>0.\end{aligned}$$

但是，注意到

$$2(\alpha_i,\alpha_j)/[(\alpha_i,\alpha_i)^{1/2}(\alpha_j,\alpha_j)^{1/2}]=0,\ -1,\ -\sqrt{2},\ -\sqrt{3}.$$

因而至多 $n-1$ 对 α_i,α_j 满足 $(\alpha_i,\alpha_j)\neq 0$，即至多 $n-1$ 对点相互连接. ▎

引理 3.5.2 π-系的 Dynkin 图中无环路.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成一个环路，则由 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 构成的 π-系有 n 对点连接，这与引理 3.5.1 矛盾.

引理 3.5.3 对 π-系 Π 中任一元素 α，与之相连的线段数至多是 3.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 与 α 相连，由引理 3.5.2 知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 两两正交. 在线性子空间 $L(\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 中取正交基 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k$. 于是有

$$\alpha=\sum_{i=0}^{k}\frac{(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i.$$

由 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，知 $(\alpha,\alpha_0)\neq 0$. 故

$$(\alpha,\alpha)=\sum_{i=0}^{k}\frac{(\alpha,\alpha_i)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)}.$$

在上式两边乘以 $4/(\alpha,\alpha)$，有

$$4=\frac{4(\alpha,\alpha_0)^2}{(\alpha_0,\alpha_0)(\alpha,\alpha)}+\sum_{i=1}^{k}\frac{4(\alpha,\alpha_i)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha,\alpha)}.$$

由 $(\alpha,\alpha_0)\neq 0$，知

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{4(\alpha,\alpha_i)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha,\alpha)}<4.$$

而 $4(\alpha,\alpha_i)^2/[(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha,\alpha)]$ 恰为 α_i 与 α 相连的线段数，由此知引理 3.5.3 成立. ▌

如果 π-系 Π 的 Dynkin 图中的两点用 k 条线段相连，我们就说这两点用 **k 重线**相连，并说此图中含有 k 重线.

推论 Dynkin 图中不含 4 及以上的 k 重线. 含有 3 重线的连通的 Dynkin 图只能是

G_2: o≡≡≡>o

引理 3.5.4 不可约 π-系 Π 中子集 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 满足

$$\frac{4(\alpha_i,\alpha_j)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)}=\begin{cases}4, & i=j,\\ 0, & |i-j|>1,\\ 1, & |i-j|=1,\end{cases}$$

或等价地，$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 对应的 Dynkin 图为

o——o— ⋯ —o——o
α_1 α_2 α_{k-1} α_k

令

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k,$$
$$\Pi'=(\Pi\cup\{\alpha\})-\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\},$$

则 Π' 也是不可约 π-系. 若 $\beta\in\Pi-\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$ 与某个 $\alpha_i(1\leqslant$

$i \leqslant k$)是 k 重线相连,则在 Π' 中 β 与 α 也是 k 重线相连.

证 我们分两步证明这个引理.

1) Π' 是一个 π-系,且若 $\beta \in \Pi - \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ 与某个 α_i 是 k 重线相连,则 β 与 α 也是 k 重线相连.

若 $\beta_1, \beta_2 \in \Pi', \beta_1 \neq \beta_2$,那么当 $\beta_1 \neq \alpha, \beta_2 \neq \alpha$ 时,自然有

$$2(\beta_1, \beta_2)/(\beta_i, \beta_i) \in \mathbf{Z}_- \quad (i = 1, 2).$$

设 $\beta_1 = \alpha, \beta_2 = \beta$,于是 $\beta \in \Pi - \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$.若 $(\beta, \alpha_i) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,则 $(\beta, \alpha) = 0$.若有 α_i 使 $(\beta, \alpha_i) \neq 0$,则由引理 3.5.2 知对于 $j \neq i$,有 $(\beta, \alpha_j) = 0$,于是

$$(\beta, \alpha) = (\beta, \alpha_i) < 0.$$

又由

$$\frac{4(\alpha_j, \alpha_{j+1})^2}{(\alpha_j, \alpha_j)(\alpha_{j+1}, \alpha_{j+1})} = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, k-1,$$

知

$$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = \cdots = (\alpha_k, \alpha_k),$$

$$\frac{2(\alpha_j, \alpha_{j+1})}{(\alpha_j, \alpha_j)} = -1.$$

于是

$$\begin{aligned}(\alpha, \alpha) &= \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j, \alpha_j) + 2\sum_{j=1}^{k-1} (\alpha_j, \alpha_{j+1}) \\ &= (\alpha_k, \alpha_k) = (\alpha_i, \alpha_i).\end{aligned}$$

因而

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} = \frac{2(\beta, \alpha_i)}{(\beta, \beta)} \in \mathbf{Z}_-; \quad \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \in \mathbf{Z}_-.$$

故 Π' 为 π-系,且 α_i 与 β 在 Π 连接线的重数恰为 α 与 β 在 Π' 中连接线的重数.

2) Π' 是不可约的.

若 Π' 有分解 $\Pi' = \Pi_1' \cup \Pi_2', (\Pi_1', \Pi_2',) = 0$,不妨设 $\alpha \in \Pi_1'$.令 $\Pi_1 = (\Pi_1' - \{\alpha\}) \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}, \Pi_2 = \Pi_2'$,于是有

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \quad (\Pi_1, \Pi_2) = 0.$$

这与 Π 不可约矛盾. 故 Π' 是不可约的. ▌

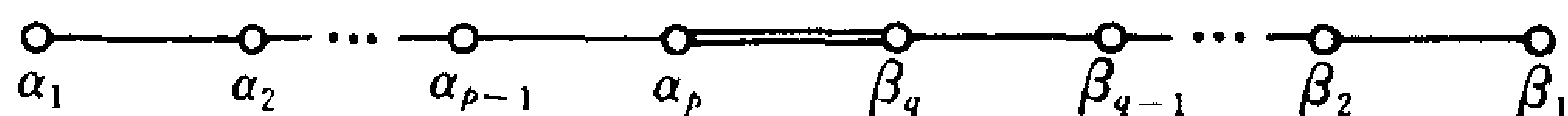
如果 π-系 Π 中点 α 与三个点 β_1,β_2,β_3 相连,则称 α 为一个**三岔点**. 从引理 3.5.2 与引理 3.5.3 知,此时 β_1,β_2,β_3 互不相连,且 α 与 β_i 都是单线相连.

引理 3.5.5 设 Π 是不含 3 重线的不可约 π-系,则其 Dynkin 图只有下面三种可能:

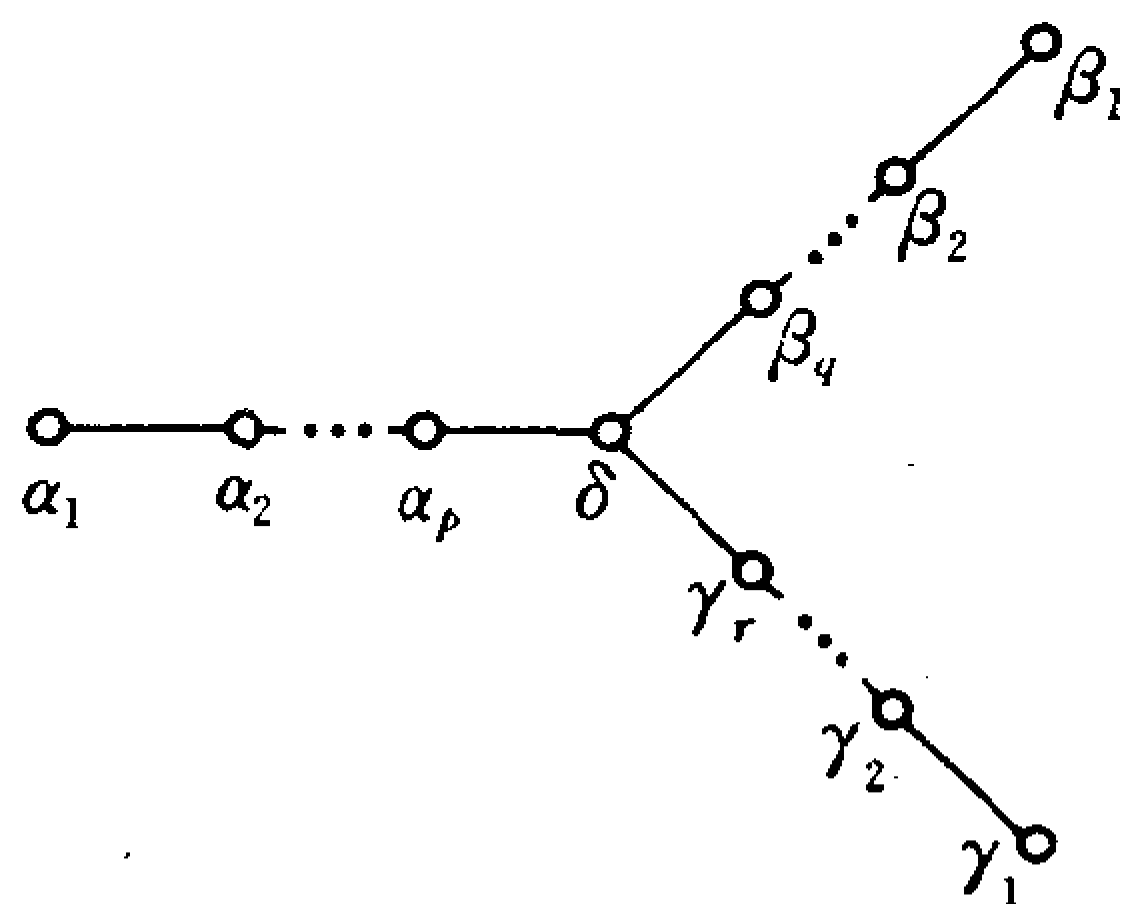
1) 不含 2 重线与三岔点,即



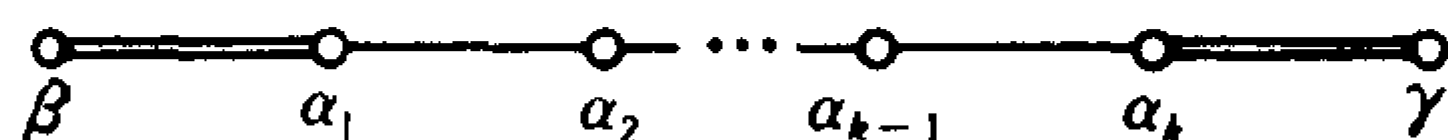
2) 含有一个 2 重线,不含三岔点,即



3) 不含 2 重线,含有一个三岔点,即



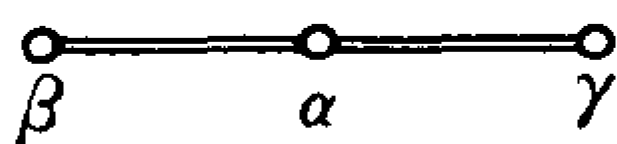
证 若 Π 的 Dynkin 图中含有两个 2 重线,则 Π 有子集 Π_1,其 Dynkin 图为



由引理 3.5.4,有不可约 π-系 $\Pi_1' = \{\beta,\alpha,\gamma\}$,其中

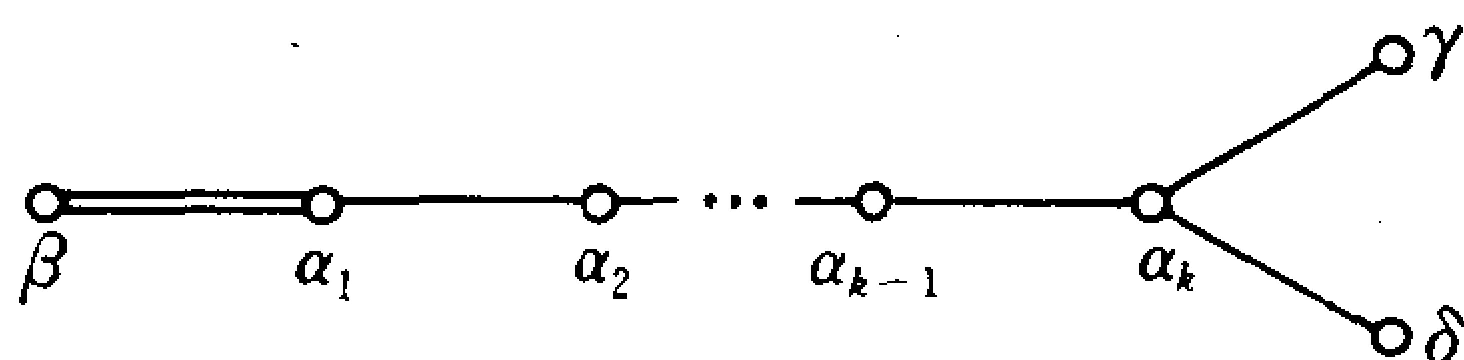
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k,$$

其 Dynkin 图为

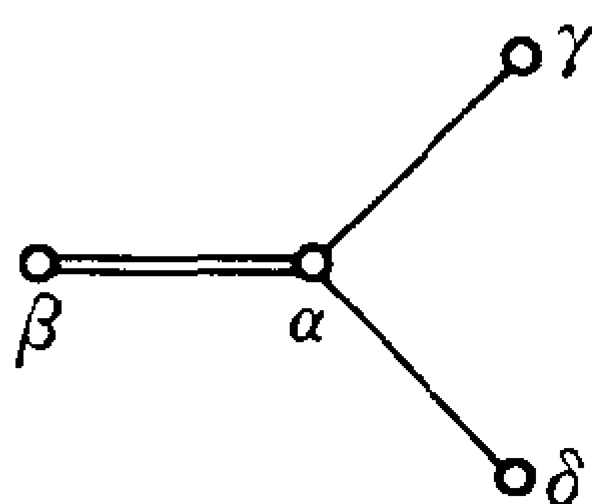


此图中与 α 相连的线段数为 4，这与引理 3.5.3 矛盾. 故 Π 的 Dynkin 图中至多含有一个 2 重线.

设 Π 的 Dynkin 图中有一个 2 重线，并有一个三岔点，则 Π 有子集 Π_2，其 Dynkin 图为



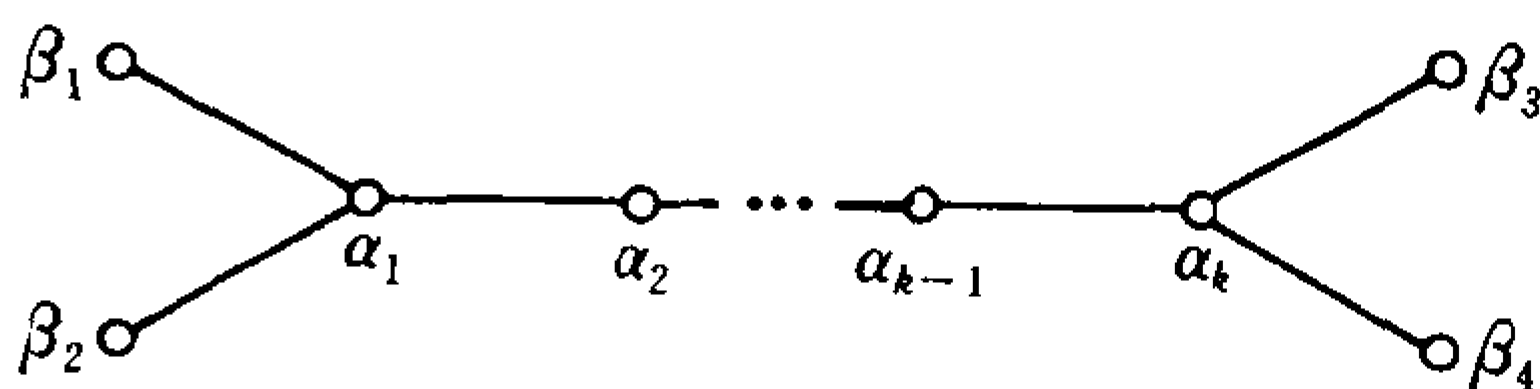
由引理 3.5.4 知，有不可约 π-系 $\Pi_2' = \{\beta,\alpha,\gamma,\delta\}$，其 Dynkin 图为



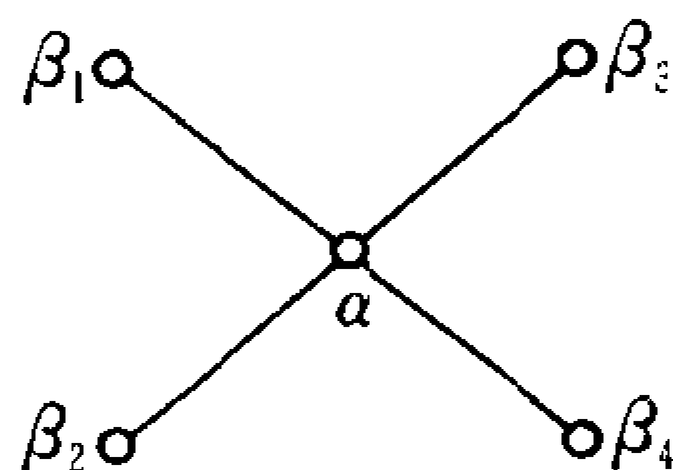
图中与 α 相连的线段数为 4，亦与引理 3.5.3 矛盾. 故 Π 中含有 2 重线则不含三岔点. 故含有 2 重线的不可约 π-系的 Dynkin 图只能是



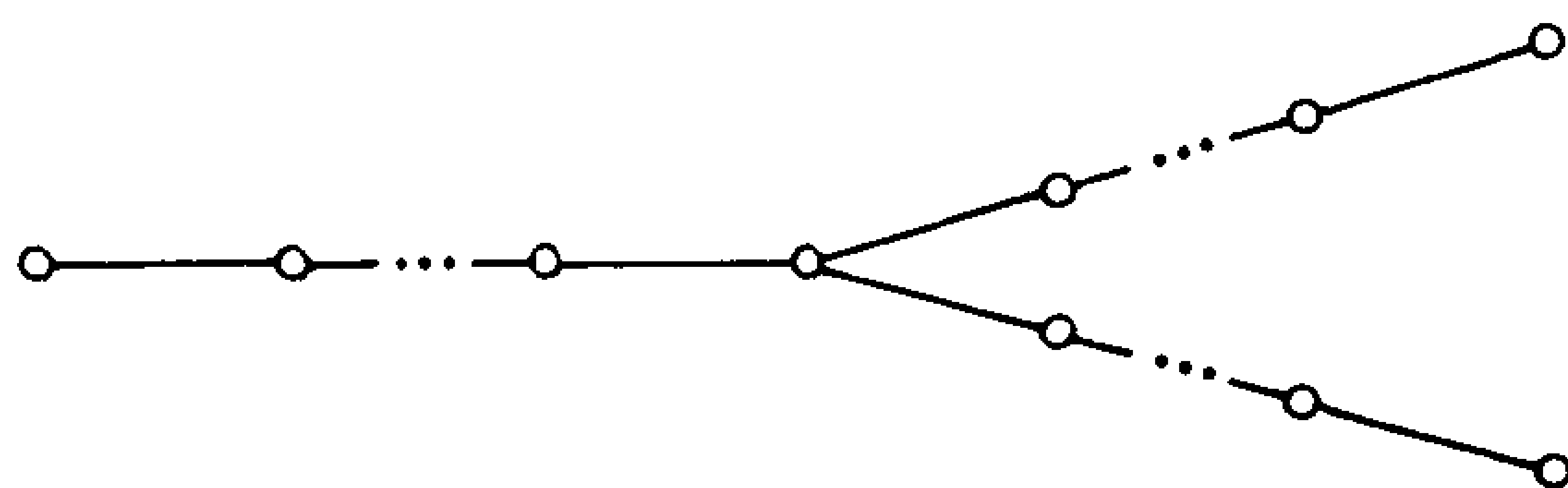
设 Π 的 Dynkin 图不含 2 重线. 若其中有两个三岔点，则 Π 有子集 Π_3，其 Dynkin 图为



由引理 3.5.4 知，有不可约 π-系 $\Pi_3' = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \alpha\}$，其中 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. Π_3' 的 Dynkin 图为



其中与 α 相连的线段数为 4，这与引理 3.5.3 相矛盾. 故含有三岔点的不可约 π-系的 Dynkin 图只能是



若不可约 π-系 Π 中既无 2 重线又无三岔点，其 Dynkin 图自然是

A_l: ○—○— ⋯ —○—○ （α_1, α_2, α_{l-1}, α_l）

推论 不可约 π-系 Π 中至多有两种不同长度的向量. ▎

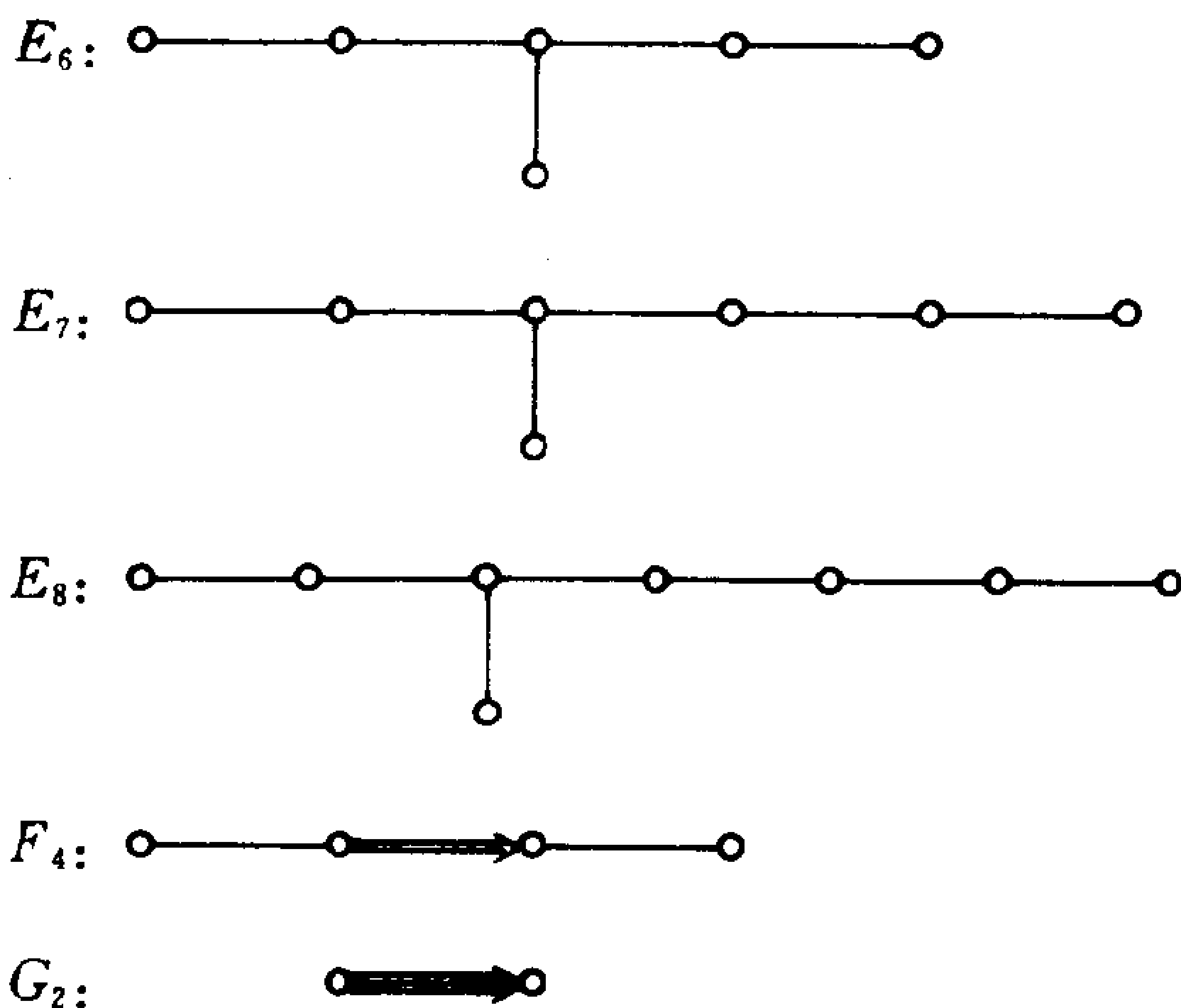
定理 3.5.6 不可约 π-系的 Dynkin 图只有以下几种可能：

A_l: ○—○— ⋯ —○—○

B_l: ○⇐○—○— ⋯ —○—○ $l \geqslant 2$

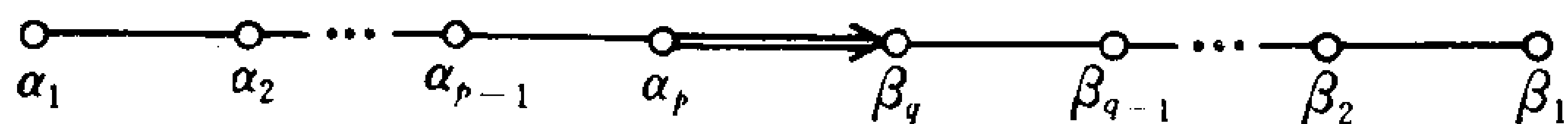
C_l: ○⇒○—○— ⋯ —○—○ $l \geqslant 2$

D_l: ○—○— ⋯ —○—○< $l \geqslant 4$



证 若Π中含有3重线，由引理3.5.3的推论知，此时Π的Dynkin图为G_2.

若Π中有二重线，由引理3.5.5知，Π的图为下面形式：



即有

$$(\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=\cdots=(\alpha_p,\alpha_p)=-2(\alpha_k,\alpha_{k+1}),\quad 1\leqslant k\leqslant p-1;$$

$$(\beta_1,\beta_1)=(\beta_2,\beta_2)=\cdots=(\beta_q,\beta_q)=-2(\beta_k,\beta_{k+1}),\quad 1\leqslant k\leqslant q-1;$$

$$(\alpha_1,\alpha_1)=2(\beta_1,\beta_1);$$

$$2(\alpha_p,\beta_q)=-(\alpha_p,\alpha_p);\quad (\alpha_k,\beta_l)=0,\quad (k,l)\neq(p,q).$$

令

$$\alpha=\sum_{k=1}^{p}k\alpha_k,\quad \beta=\sum_{l=1}^{q}l\beta_l,$$

于是有

$$(\alpha,\alpha)=\sum_{k=1}^{p}k^2(\alpha_k,\alpha_k)+2\sum_{k=1}^{p-1}k(k+1)(\alpha_k,\alpha_{k+1})$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{p}k^2-\sum_{k=1}^{p-1}k(k+1)\right)(\alpha_1,\alpha_1)$$

$$=\frac{1}{2}p(p+1)(\alpha_1,\alpha_1);$$

$$(\beta,\beta)=\frac{1}{2}q(q+1)(\beta_1,\beta_1)=\frac{1}{4}q(q+1)(\alpha_1,\alpha_1);$$

$$(\alpha,\beta)=(p\alpha_p,q\beta_q)=pq(\alpha_p,\beta_q)=-\frac{1}{2}pq(\alpha_1,\alpha_1).$$

由于 α 与 β 线性无关,故有

$$(\alpha,\beta)^2<(\alpha,\alpha)(\beta,\beta).$$

由此得

$$\frac{1}{4}p^2q^2<\frac{1}{8}pq(p+1)(q+1),$$

即

$$pq-p-q-1<0,$$

或

$$(p-1)(q-1)<2.$$

因而 p,q 只有下面三种可能:

$p=1$,q 为任意自然数,此时图形为 C_l;

p 任意,$q=1$,此时图形为 B_l;

$p=q=2$,此时图形为 F_4.

现设 Π 的 Dynkin 图中有三岔点. 于是 Π 的 Dynkin 图如引理 3.5.5 的情形 3),不妨设 $p\geqslant q\geqslant r(\geqslant 1)$. 令

$$\alpha=\sum_{i=1}^{p}i\alpha_i,\quad \beta=\sum_{j=1}^{q}j\beta_j,\quad \gamma=\sum_{k=1}^{r}k\gamma_k.$$

于是,不难得到

$$(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}p(p+1)(\delta,\delta);\quad (\beta,\beta)=\frac{1}{2}q(q+1)(\delta,\delta);$$

$$(\gamma,\gamma)=\frac{1}{2}r(r+1)(\delta,\delta);\quad (\alpha,\delta)=-\frac{1}{2}p(\delta,\delta);$$

$$(\beta,\delta)=-\frac{1}{2}q(\delta,\delta);\quad (\gamma,\delta)=-\frac{1}{2}r(\delta,\delta);$$

$$(\alpha,\beta)=(\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)=0.$$

由于 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 线性无关，于是

$$\cos^2\langle\delta,\alpha\rangle+\cos^2\langle\delta,\beta\rangle+\cos^2\langle\delta,\gamma\rangle<1.$$

而

$$\cos^2\langle\delta,\alpha\rangle=\frac{(\alpha,\delta)^2}{(\alpha,\alpha)(\delta,\delta)}=\frac{p}{2(p+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p+1}\right);$$

$$\cos^2\langle\delta,\beta\rangle=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q+1}\right);$$

$$\cos^2\langle\delta,\gamma\rangle=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r+1}\right).$$

因而

$$\left(1-\frac{1}{p+1}\right)+\left(1-\frac{1}{q+1}\right)+\left(1-\frac{1}{r+1}\right)<2,$$

即

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{r+1}>1.$$

由 $p\geqslant q\geqslant r\geqslant 1$，故 $\frac{1}{p+1}\leqslant\frac{1}{q+1}\leqslant\frac{1}{r+1}\leqslant\frac{1}{2}<1$，于是

$$\frac{3}{r+1}>1,$$

故 $r+1=2$，即 $r=1$.

进而

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}>\frac{1}{2},$$

于是

$$\frac{1}{q+1}>\frac{1}{4}.$$

因而 $q<3$.

从而，此时只有以下可能：

$r=1,q=1,p$ 为任意自然数，此时图形为 D_l.

$r=1,q=2$，此时 $\frac{1}{p+1}>\frac{1}{6}$，故 $2\leqslant p\leqslant 5$，即 $p=2,3,4$.

此时对应的图形分别为 E_6, E_7, E_8.

最后,若 Π 既无 2 重线又无三岔点,其图形自然是 A_l. ▍

下节我们证明典型李代数 $sl(l+1,C), so(2l+1,C), sp(l,C)$ 与 $so(2l,C)$ 为单李代数,其 Dynkin 图分别为 A_l, B_l, C_l 与 D_l.

下章我们将证明确有单李代数其 Dynkin 图分别为 E_6, E_7, E_8, F_4 与 G_2. 在最后一章,我们将给出这些单李代数的实现.

习　　题

1. 若单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ 的 Dynkin 图为



试证 $\mathfrak{g}$ 的根系为

$$\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2), \pm(2\alpha_1+\alpha_2),$$
$$\pm(3\alpha_1+\alpha_2), \pm(3\alpha_1+2\alpha_2)\}.$$

2. 写出不可约的 π-系 $A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4$ 与 G_2 的 Cartan 矩阵,并计算其行列式.

§6　典型李代数的素根系

第一章§4 我们给出了典型李代数 $sl(l+1,C), so(2l+1,C), sp(l,C)$ 与 $so(2l,C)$ 的定义. 在第二章 §8 我们算出了它们的 Killing 型,并证明它们为复半单李代数($so(2,C)$ 除外),同时还给出了它们的 Cartan 子代数及其根子空间分解.

本节沿用第二章 §8 的符号,并将讨论典型李代数的单性.

定理 3.6.1　$sl(l+1,C)(l \geqslant 1)$ 是单李代数,其 Dynkin 图为 A_l.

证　由定理 2.8.1 知 $\mathrm{sl}(l+1,C)$ 是半单的,且有 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_{l+1}) \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_{l+1} = 0\}.$$

而且 $\Delta = \{\lambda_i - \lambda_j | i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant l+1\}$，其中

$$\lambda_i(\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_{l+1})) = x_i,$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i - \lambda_j} = CE_{ij}.$$

由定理 3.2.2 知

$$[E_{ij}, E_{ji}] = (E_{ij}, E_{ji}) h_{\lambda_i - \lambda_j},$$

再由定理 2.8.1 知

$$E_{ii} - E_{jj} = 2(l+1)(\mathrm{tr} E_{ij} E_{ji}) h_{\lambda_i - \lambda_j},$$

故

$$h_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{2(l+1)}(E_{ii} - E_{jj}).$$

再由第三章 §2 的约定，将 $h_{\lambda_i - \lambda_j}$ 与 $\lambda_i - \lambda_j$ 等同起来，故可记为

$$\lambda_i - \lambda_j = \frac{1}{2(l+1)}(E_{ii} - E_{jj}).$$

于是

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} &= \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_{l+1}) | a_i \in \mathbf{R}, a_1 + \cdots + a_{l+1} = 0\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{l+1} a_i E_{ii} | a_i \in \mathbf{R}, \sum_{i=1}^{l+1} a_i = 0\right\}.\end{aligned}$$

显然，

$$\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_l - \lambda_{l+1}$$

是 $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 的一组基.关于这组基的字典序所确定的正、负根系与素根系分别为

$$\Delta_+ = \{\lambda_i - \lambda_j | 1 \leqslant i < j \leqslant l+1\},$$

$$\Delta_- = \{\lambda_i - \lambda_j | 1 \leqslant j < i \leqslant l+1\},$$

$$\Pi = \{\lambda_i - \lambda_{i+1} | 1 \leqslant i \leqslant l\}.$$

记 $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, l)$，则有

$$\begin{aligned}(\alpha_i, \alpha_j) &= 2(l+1)\mathrm{tr}(\alpha_i \cdot \alpha_j) \\ &= 2(l+1) \cdot \frac{1}{4(l+1)^2} \mathrm{tr}((E_{ii} - E_{i+1,i+1})(E_{jj} - E_{j+1,j+1}))\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases} 0, & |i-j|>1, \\ \dfrac{1}{l+1}, & i=j, \\ -\dfrac{1}{2(l+1)}, & |i-j|=1. \end{cases}
$$

因而

$$
\frac{4(\alpha_i,\alpha_j)^2}{(\alpha_i,\alpha_i)(\alpha_j,\alpha_j)}=\begin{cases} 0, & |i-j|>1, \\ 4, & i=j, \\ 1, & |i-j|=1. \end{cases}
$$

对应的 Dynkin 图

$$
A_l:\ \underset{\alpha_1}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{\alpha_2}{\circ}\!-\cdots-\!\underset{\alpha_{l-1}}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{\alpha_l}{\circ}
$$

是连通的，因而 $sl(l+1,\boldsymbol{C})$ 是单李代数. ▎

定理 3.6.2 $so(2l+1,\boldsymbol{C})$ $(l\geqslant 1)$ 是单李代数，其 Dynkin 图为 B_l.

证 由定理 2.8.2 知 $so(2l+1,\boldsymbol{C})$ 是半单的. 我们仍以与 $so(2l+1,\boldsymbol{C})$ 同构的 $g(2l+1,S,\boldsymbol{C})$ 代替 $so(2l+1,\boldsymbol{C})$（参见定理 2.8.5），于是 $g(2l+1,S,\boldsymbol{C})$ 有 Cartan 子代数

$$
\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(0,x_1,x_2,\cdots,x_l,-x_1,-x_2,\cdots,-x_l \mid x_i\in \boldsymbol{C})\}.
$$

对此 Cartan 子代数的根系

$$
\Delta=\{\pm\lambda_k,\ \pm(\lambda_i-\lambda_j),\ \pm(\lambda_i+\lambda_j) \mid 1\leqslant k\leqslant l, 1\leqslant i<j\leqslant l\},
$$

其中 λ_i 为下式确定：

$$
\lambda_i(\mathrm{diag}(0,x_1,x_2,\cdots,x_l,-x_1,-x_2,\cdots,-x_l))=x_i,
$$

$$
\mathfrak{g}_{\lambda_i}=\boldsymbol{C}W_i,\quad W_i=E_{1+i,1}-E_{1,l+1+i},
$$

$$
\mathfrak{g}_{-\lambda_i}=\boldsymbol{C}V_i,\quad V_i=E_{1,1+i}-E_{l+1+i,1}
$$

（参见定理 2.8.5）. 再由定理 2.8.2 知

$$
\begin{aligned}
[W_i,V_i]&=(W_i,V_i)\lambda_i \\
&=(2l-1)(\mathrm{tr}W_iV_i)\lambda_i=2(2l-1)\lambda_i.
\end{aligned}
$$

因而

$$\lambda_i = \frac{1}{2(2l-1)}(E_{1+i,1+i} - E_{l+1+i,l+1+i}),$$

$$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}} = \{\mathrm{diag}(0,a_1,a_2,\cdots,a_l,-a_1,-a_2,\cdots,-a_l) \mid a_i \in \boldsymbol{R}\}.$$

在 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 中定义次序如下：

$$\mathrm{diag}(0,a_1,a_2,\cdots,a_l,-a_1,-a_2,\cdots,-a_l) > 0,$$

若 $a_1,a_2,\cdots,a_l$ 中第一个非零数为正. 于是

$$\Delta_+ = \{\lambda_k,\lambda_i - \lambda_j,\lambda_i + \lambda_j \mid 1 \leqslant k \leqslant l, 1 \leqslant i < j \leqslant l\},$$

$$\Delta_- = \{-\lambda_k,\lambda_j - \lambda_i,-\lambda_i - \lambda_j \mid 1 \leqslant k \leqslant l, 1 \leqslant i < j \leqslant l\},$$

$$\Pi = \{\lambda_1 - \lambda_2,\lambda_2 - \lambda_3,\cdots,\lambda_{l-1} - \lambda_l,\lambda_l\}.$$

此时，不难算出：

$$(\lambda_l,\lambda_l) = \frac{1}{2(2l-1)},$$

$$(\lambda_l,\lambda_{i-1} - \lambda_i) = \frac{-1}{2(2l-1)}\delta_{il},$$

$$(\lambda_{i-1} - \lambda_i,\lambda_{j-1} - \lambda_j) = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1, \\ -\dfrac{1}{2(2l-1)}, & |i-j| = 1, \\ \dfrac{1}{2l-1}, & i = j. \end{cases}$$

由此可知 $g(2l+1,S,\boldsymbol{C})$ 即 $so(2l+1,\boldsymbol{C})$ 的 Dynkin 图为

B_l: ○——○—⋯—○——○⇒○ （α_1, …, α_{l-1}, α_l）

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \quad i = 1,2,\cdots,l-1;$$

$$\alpha_l = \lambda_l.$$

这是连通图. 故 $so(2l+1,\boldsymbol{C})$ 是单李代数. ▌

定理 3.6.3 $so(2l,\boldsymbol{C})$ ($l \geqslant 4$) 是单李代数，其 Dynkin 图为 D_l.

证 由定理 2.8.2 知 $so(2l,\boldsymbol{C})$ 是半单的. 仍以与 $so(2l,\boldsymbol{C})$ 同构的 $g(2l,S_1,\boldsymbol{C})$ 代替 $so(2l,\boldsymbol{C})$（参见定理 2.8.6），于是 $g(2l,S_1,\boldsymbol{C})$ 有 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h} = \{\operatorname{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_l, -x_1, -x_2, \cdots, -x_l) \mid x_i \in \boldsymbol{C}\}.$$

对此 Cartan 子代数的根系

$$\Delta = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j),\ \pm(\lambda_i + \lambda_j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant l\},$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i - \lambda_j} = \boldsymbol{C}A_{ij}, \quad A_{ij} = E_{ij} - E_{l+j,l+i};$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i + \lambda_j} = \boldsymbol{C}B_{ij}, \quad B_{ij} = E_{i,l+j} - E_{j,l+i};$$

$$\mathfrak{g}_{-(\lambda_i + \lambda_j)} = \boldsymbol{C}C_{ij}, \quad C_{ij} = E_{l+i,j} - E_{l+j,i}$$

(参见定理 2.8.6). 再由定理 2.8.2 知

$$\begin{aligned}[A_{ij}, A_{ji}] &= (A_{ij}, A_{ji})(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= 2(l-1)(\operatorname{tr} A_{ij}A_{ji})(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= 4(l-1)(\lambda_i - \lambda_j).\end{aligned}$$

于是

$$\lambda_i - \lambda_j = \frac{1}{4(l-1)}(E_{ii} - E_{jj} + E_{l+j,l+j} - E_{l+i,l+i}),$$

$$\begin{aligned}[B_{ij}, C_{ij}] &= (B_{ij}, C_{ij})(\lambda_i + \lambda_j) \\ &= 2(l-1)(\operatorname{tr} B_{ij}C_{ij})(\lambda_i + \lambda_j) \\ &= -4(l-1)(\lambda_i + \lambda_j).\end{aligned}$$

由此有

$$\lambda_i + \lambda_j = \frac{1}{4(l-1)}(E_{ii} + E_{jj} - E_{l+i,l+i} - E_{l+j,l+j}).$$

显然

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, l-1,$$

$$\alpha_l = \lambda_{l-1} + \lambda_l$$

构成 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 的基. 对于这组基的字典序,

$$\Delta_+ = \{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j \mid i < j\};$$

$$\Delta_- = \{-(\lambda_i - \lambda_j), -(\lambda_i + \lambda_j) \mid i < j\};$$

$$\Pi = \{\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, l\}.$$

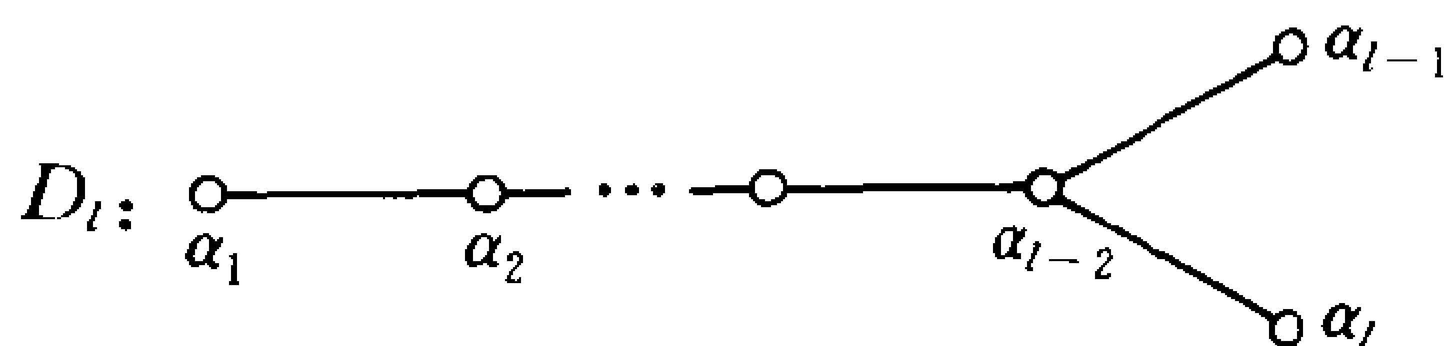
容易算出

$$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = \cdots = (\alpha_l, \alpha_l) = \frac{1}{2(l-1)}.$$

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0, & |i-j|>1,\quad 1\leqslant i,j\leqslant l-1,\\ -\dfrac{1}{4(l-1)}, & |i-j|=1,\quad 1\leqslant i,j\leqslant l-1.\end{cases}$$

$$(\alpha_l,\alpha_i)=-\frac{1}{4(l-1)}\delta_{i,l-2},\quad 1\leqslant i\leqslant l-1.$$

因而 $so(2l,\boldsymbol{C})$ 的 Dynkin 图为



这图是连通的，故 $so(2l,\boldsymbol{C})(l\geqslant 4)$ 是单李代数. ▌

定理 3.6.4 $sp(l,\boldsymbol{C})$ 是单李代数，其 Dynkin 图为 C_l.

证 由定理 2.8.4 知 $sp(l,\boldsymbol{C})$ 是半单的，且有 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_l,-x_1,-x_2,\cdots,-x_l)\,|\,x_i\in\boldsymbol{C}\}.$$

对此 Cartan 子代数的根系

$$\Delta=\{\pm(\lambda_i-\lambda_j),\pm(\lambda_i+\lambda_j),\pm 2\lambda_k\,|\,1\leqslant i<j\leqslant l,1\leqslant k\leqslant l\},$$

其中 λ_i 由下式定义:

$$\lambda_i(\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_l,-x_1,-x_2,\cdots,-x_l))=x_i,\quad 1\leqslant i\leqslant l.$$

而且

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i-\lambda_j}=\boldsymbol{C}A_{ij},\quad A_{ij}=E_{ij}-E_{l+j,l+i};$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_i+\lambda_j}=\boldsymbol{C}B_{ij},\quad B_{ij}=E_{i,l+j}+E_{j,l+i};$$

$$\mathfrak{g}_{-(\lambda_i+\lambda_j)}=\boldsymbol{C}C_{ij},\quad C_{ij}=E_{l+i,j}+E_{l+j,i};$$

$$\mathfrak{g}_{2\lambda_i}=\boldsymbol{C}B_{ii},\quad \mathfrak{g}_{-2\lambda_i}=\boldsymbol{C}C_{ii}.$$

由定理 2.8.4 知

$$\begin{aligned}[B_{ii},C_{ii}]&=(B_{ii},C_{ii})(2\lambda_i)\\&=2(l+1)(\mathrm{tr}B_{ii}\cdot C_{ii})(2\lambda_i)=16(l+1)\lambda_i.\end{aligned}$$

故

$$\lambda_i=\frac{1}{4(l+1)}(E_{ii}-E_{l+i,l+i}),$$

即

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}, \quad i = 1,2,\cdots,l-1;$$
$$\alpha_l = 2\lambda_l,$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 是 $\mathfrak{h}_R$ 的一组基. 关于此基的字典序有

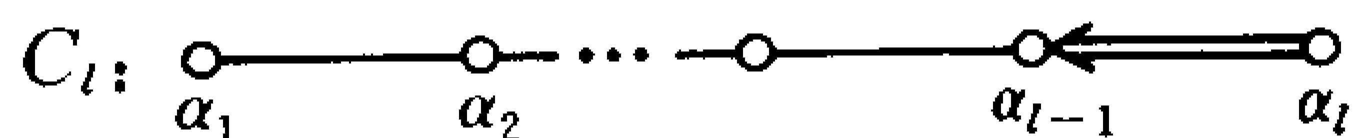
$$\Delta_+ = \{\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j, 2\lambda_k \mid 1 \leqslant i < j \leqslant l, 1 \leqslant k \leqslant l\},$$
$$\Delta_- = \{\lambda_j - \lambda_i, -\lambda_i - \lambda_j, -2\lambda_k \mid 1 \leqslant i < j \leqslant l, 1 \leqslant k \leqslant l\},$$
$$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}.$$

而且

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1, \\ -\dfrac{1}{4(l+1)}, & |i-j| = 1, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant l-1, \\ \dfrac{1}{2(l+1)}, & i = j, \ 1 \leqslant i \leqslant l-1; \end{cases}$$

$$(\alpha_{l-1}, \alpha_l) = -\frac{1}{2(l+1)}; \quad (\alpha_l, \alpha_l) = \frac{1}{(l+1)}.$$

因而 $sp(l,\boldsymbol{C})$ 的 Dynkin 图为



这是连通图,故 $sp(l,\boldsymbol{C})$ 为单李代数. ▌

习　　题

1. 给出 $so(4,\boldsymbol{C})$ 与 $so(6,\boldsymbol{C})$ 的 Dynkin 图.

2. 给出 $sl(l+1,\boldsymbol{C})$, $so(2l+1,\boldsymbol{C})(l \geqslant 2)$, $so(2l,\boldsymbol{C})(l \geqslant 4)$ 与 $sp(l,\boldsymbol{C})(l \geqslant 2)$ 的最高根.

第四章　复半单李代数的存在

本章将介绍复半单李代数的 Weyl 群，李代数的通用包络代数及自由李代数，从而证明对应每个不可约 π-系（或 Dynkin 图），确有复单李代数以其为素根系（或对应的 Dynkin 图）.

Weyl 群与内自同构有密切的关系，这也是证明复半单李代数分类定理的基础.

Weyl 群与通用包络代数对于表示理论也是非常重要的.

§1　Weyl　房

本节我们介绍 Weyl 房的概念及其与正则元素、根系之间的关系.

我们以 (x,y) 表示复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 设 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，利用 Killing 型的非退化性，可将 $\mathfrak{h}^*$ 与 $\mathfrak{h}$ 等同. 又设 Δ 为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系，$\mathfrak{h}_R$ 为 Δ 张成的实线性空间. 我们知道 $x \in \mathfrak{h}$ 为正则元的充分必要条件是 $(\alpha,x) \neq 0, \forall\ \alpha \in \Delta$（参看第二章 §6 的习题 5).

定理 4.1.1　设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系为 Δ，则 $x_0 \in \mathfrak{h}_R$ 为正则元当且仅当对于 $\mathfrak{h}_R$ 的某种次序，满足

$$(x_0,\alpha) > 0, \quad \forall\ \alpha \in \Delta_+. \tag{1}$$

反之，设 Δ_+ 是 $\mathfrak{h}_R$ 在某种次序下的正根系，则在 $\mathfrak{h}_R$ 中存在正则元 x_0 满足(1) 式.

证　设 x_0 是 $\mathfrak{h}_R$ 中的正则元，$\dim\mathfrak{h} = n$. 于是 $\mathfrak{h}_R$ 中有基 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 满足

$$(x_0,x_i) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

又设 Δ_+ 为 $\mathfrak{h}_R$ 对这组基的字典序的正根系，$\alpha \in \Delta, \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i$，于是有

$$(x_0, \alpha) = a_0 (x_0, x_0),$$

即有 $a_0 \neq 0$. 故 $\alpha \in \Delta_+$ 当且仅当 $a_0 > 0$，即(1)式成立.

又若对 $\mathfrak{h}_R$ 的某种次序，(1) 式成立. 对于 $\forall\ \alpha \in \Delta_+, (x_0, \alpha) > 0$. 故 $(x_0, -\alpha) < 0$，即

$$(x_0, \alpha) \neq 0, \quad \forall\ \alpha \in \Delta.$$

因此 x_0 为正则元.

反之，设 $\Delta_+, \Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 分别为 $\mathfrak{h}_R$ 对于某种次序的正根系，素根系. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathfrak{h}_R$ 的基，故有 $x_0 \in \mathfrak{h}_R$，使得

$$(x_0, \alpha_i) = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

对于 $\alpha \in \Delta$，有 $\alpha = \pm \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i, k_i \in \mathbf{Z}_+$，且 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为零. 于是

$$(x_0, \alpha) = \pm \sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0.$$

故 x_0 为正则元，且满足(1) 式. ▌

推论 设 x_0 是 $\mathfrak{h}_R$ 中的正则元，则使(1) 式成立的正根系(素根系) 是唯一的.

事实上，设 $\mathfrak{h}_R$ 中有两种次序所确定的正根系 Δ'_+, Δ_+ 均满足(1) 式，即

$$(x_0, \alpha) > 0, \quad \forall\ \alpha \in \Delta_+;$$

$$(x_0, \alpha') > 0, \quad \forall\ \alpha' \in \Delta'_+.$$

于是有

$$\Delta = \Delta'_+ \cup \Delta'_- = \Delta_+ \cup \Delta_-.$$

设 $\beta \in \Delta_-$，故 $(x_0, \beta) < 0$. 因而 $\beta \overline{\in} \Delta'_+$，即 $\beta \in \Delta'_-$. 同样，若 $\beta' \in \Delta'_-$，则 $\beta' \in \Delta_-$. 故 $\Delta'_- = \Delta_-$，因而 $\Delta'_+ = \Delta_+$. ▌

从这里我们知道确定正根系(即负根系) 完全可以由 $\mathfrak{h}_R$ 中的

一个正则元来实现，而不一定要用 $\mathfrak{h}_R$ 中的次序来实现. 由一个正则元 x_0 与(1) 式来确定 Δ_+ 与 Π 比用 $\mathfrak{h}_R$ 的次序来确定 Δ_+ 与 Π 更为本质地反映根系的性质.

设 $x \in \mathfrak{h}_R$，记 $\mathfrak{h}_R$ 中与 x 正交的 $n-1$ 维子空间(超平面) 为 $\mathfrak{h}_x$，即

$$\mathfrak{h}_x = \{y \in \mathfrak{h}_R \mid (y,x) = 0\}. \tag{2}$$

则 $\mathfrak{h}_R$ 中所有正则元的集合为

$$\mathfrak{h}_R - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{h}_\alpha.$$

定义 4.1.1 $\mathfrak{h}_R$ 中正则元集 $\mathfrak{h}_R - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{h}_\alpha$ 的连通分支称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Weyl 房**.

定理 4.1.2 设 Δ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，$\Pi = \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $\mathfrak{h}_R$ 在某种次序下的素根系，则 $\mathfrak{h}_R$ 中的子集

$$\Omega_\Pi = \{x \in \mathfrak{h}_R \mid (\alpha_i,x) > 0, 1 \leqslant i \leqslant n\} \tag{3}$$

是非空的连通开凸集，且 Ω_Π 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Weyl 房.

反之，$\mathfrak{g}$ 的任一 Weyl 房均可以表示为(3)式的形式.

证 由定理 4.1.1 知 $\Omega_\Pi \neq \varnothing$，$\Omega_\Pi$ 中元素均为正则元. 再由 Ω_Π 的定义知 Ω_Π 是 $\mathfrak{h}_R$ 的开集. 现设 $x_1,x_2 \in \Omega_\Pi$，于是 $\mathfrak{h}_R$ 中连接 x_1，x_2 的直线段为 $\{tx_1 + (1-t)x_2 \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. 由

$$(\alpha_i, tx_1 + (1-t)x_2) = t(\alpha_i,x_1) + (1-t)(\alpha_i,x_2) > 0$$

知 $\{tx_1 + (1-t)x_2 \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subseteq \Omega_\Pi$，故 Ω_Π 为连通的开凸集.

对任一 $x \in \mathfrak{h}_R - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{h}_\alpha$，由定理 4.1.1 知，可在 $\mathfrak{h}_R$ 中确定一次序，设对此次序的素根系为 $\Pi' = \{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n\}$，则

$$(\alpha'_i,x) > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

即有 $x \in \Omega_{\Pi'}$. 因而

$$\mathfrak{h}_R - \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{h}_\alpha = \bigcup_{\Pi} \Omega_\Pi, \tag{4}$$

这里等式的右端是对所有可能的素根系 $\{\Pi\}$ 求和.

设 $x \in \Omega_\Pi \cap \Omega_{\Pi'}$，对 Π, Π' 的正根系分别为 Δ_+, Δ'_+. 于是由定理 4.1.1 的推论知 $\Delta_+ = \Delta'_+$，因而 $\Pi = \Pi'$，故 $\Omega_\Pi = \Omega_{\Pi'}$. 由此得 Ω_Π 与 $\Omega_{\Pi'}$ 或者相等，或者不相交. 故 Ω_Π 是 $\mathfrak{h}_R - \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{h}_\alpha$ 的一个连通分支，即 $\mathfrak{g}$ 的一个 Weyl 房，且 $\mathfrak{g}$ 的每个 Weyl 房均可表示为(3)式的形式.
▌

推论 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系 Δ 中所有可能的素根系的集合 $\{\Pi\}$ 与 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的 Weyl 房的集合 $\{\Omega_\Pi\}$ 之间有一一对应关系. ▌

从这个定理可以知道 Weyl 房比 $\mathfrak{h}_R$ 中正则元更深刻地反映了 $\mathfrak{g}$ 的性质.

例 4.1.1 我们知道 $A_2 = sl(3, \boldsymbol{C})$ 的根系

$$\Delta = \{\pm(\lambda_1 - \lambda_2), \pm(\lambda_2 - \lambda_3), \pm(\lambda_1 - \lambda_3)\}$$

(参看定理 3.6.1). 令 $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3$，则 $\lambda_1 - \lambda_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. 由于 $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 120°$，于是 $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$ 及 $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$ 在 $\mathfrak{h}_R = \boldsymbol{R}^2$ 中如图 1 所示. $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{h}_\alpha$ 也在图 1 中画出(由三条通过原点的直线构成). 从图中不难看出，A_2 有 6 个 Weyl 房，因而有 6 个可能的素根系：

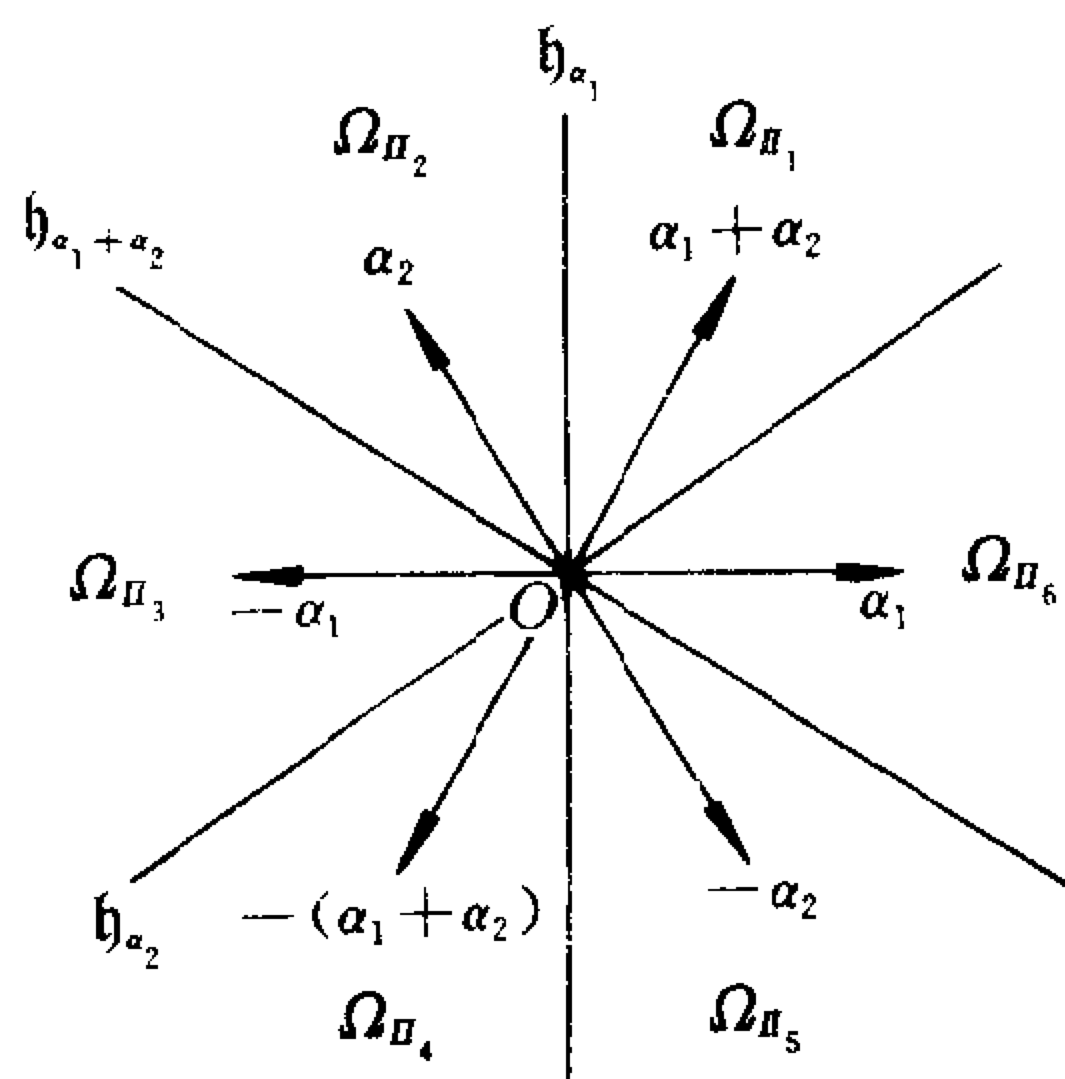


图 1

Ω_{Π_1}, $\Pi_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$;

Ω_{Π_2}, $\Pi_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2. -\alpha_1\}$;

Ω_{Π_3}, $\Pi_3 = \{\alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\}$;

Ω_{Π_4}, $\Pi_4 = \{-\alpha_1, -\alpha_2\}$;

Ω_{Π_5}, $\Pi_5 = \{\alpha_1, -(\alpha_1 + \alpha_2)\}$;

Ω_{Π_6}, $\Pi_6 = \{-\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$. ▌

从这个例子可以看到，对于 $sl(3, \boldsymbol{C})$，$\forall \alpha \in \Delta$，一定存在一个

素根系 Π,使得 $\alpha \in \Pi$. 这个性质对任意复半单李代数都是正确的.

定理 4.1.3 设 $\alpha \in \Delta$,则必有素根系 Π,使得

$$\alpha \in \Pi. \tag{5}$$

证 由于 $\beta \in \Delta, \beta \neq \pm \alpha$ 时,$\dim(\mathfrak{h}_\alpha \cap \mathfrak{h}_\beta) < \dim\mathfrak{h}_\alpha$. 又 $\Delta - \{\pm \alpha\}$ 是有限集,于是存在 $x_1 \in \mathfrak{h}_\alpha$,使得

$$(x_1, \beta) \neq 0, \quad \forall \beta \in \Delta - \{\pm \alpha\}.$$

又设 $x_2 \overline{\in} \mathfrak{h}_\alpha$,于是有适当小的 t,使得

$$(x_1 + tx_2, \beta)(x_1, \beta) > 0, \quad \forall \beta \in \Delta - \{\pm \alpha\};$$

$$(x_1 + tx_2, \alpha) = t(x_2, \alpha) \neq 0.$$

因而 $x_1 + tx_2$ 是正则元. 设 $x_1 + tx_2$ 所属 Weyl 房对应的素根系为 $\Pi_1 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$,即 $x_1 + tx_2 \in \Omega_{\Pi_1}$,

$$\Omega_{\Pi_1} = \{x \in \mathfrak{h}_R \mid (\beta_i, x) > 0, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

若 $\alpha \neq \pm \beta_i (1 \leqslant i \leqslant n)$,则由

$$(x_1 + tx_2, \beta_i) > 0,$$

$$(x_1 + tx_2, \beta_i)(x_1, \beta_i) > 0$$

知 $(x_1, \beta_i) > 0$. 故 x_1 为正则元. 这与 $x_1 \in \mathfrak{h}_\alpha$ 矛盾. 故 $\alpha = \beta_{i_0}$,即 $\alpha \in \Pi_1$,或者 $\alpha = -\beta_{i_0}$,即 $\alpha \in -\Pi_1$. $-\Pi_1$ 显然为另一次序下的素根系. 总之,有素根系 Π 使得(5)式成立. ▌

习 题

1. 在平面上画出不可约 π-系 B_2 的根系及 Weyl 房,并决定 Weyl 房所对应的素根系.

2. 在平面上画出 G_2 的根系及 Weyl 房,并决定对应的素根系.

3. 设 x_1, x_2 是 $\mathfrak{h}_R$ 的正则元,则 x_1 与 x_2 在同一个 Weyl 房中的充分必要条件是它们由(1)式决定相同的正根系.

4. 在 $\mathfrak{h}_R$ 的正则元集合 $\mathfrak{h}_R - \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{h}_\alpha$ 定义关系 $\sim$ 如下:

$$x_1 \sim x_2, \text{若} (x_1, \alpha)(x_2, \alpha) > 0, \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

试证关系 $\sim$ 是等价关系,并求出对于此关系的等价类.

§2 Weyl 群

本节将给出Weyl群的定义并讨论它的性质,进而证明一个复半单李代数为单李代数的充分必要条件是其素根系不可约,即其Dynkin图是连通的.

我们仍假定 $\mathfrak{h}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个Cartan子代数. 利用 $\mathfrak{g}$ 的Killing型 (x,y) 可将 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{h}^*$ 等同. 以 $\mathfrak{h}_R$ 表示由根系 Δ 张成的实线性空间,这是以 (x,y) 为内积的Euclid空间. 设 δ 为 $\mathfrak{h}_R$ 中一个非零元素,以 $\mathfrak{h}_\delta$ 表示与 δ 正交的超平面,即

$$\mathfrak{h}_\delta = \{x \in \mathfrak{h}_R \mid (x, \delta) = 0\}.$$

以 r_δ 表示 $\mathfrak{h}_R$ 中元素对 $\mathfrak{h}_\delta$ 的反射(见图 2),即

$$r_\delta x = x - \frac{2(\delta, x)}{(x, x)}\delta, \quad \forall x \in \mathfrak{h}_R. \tag{1}$$

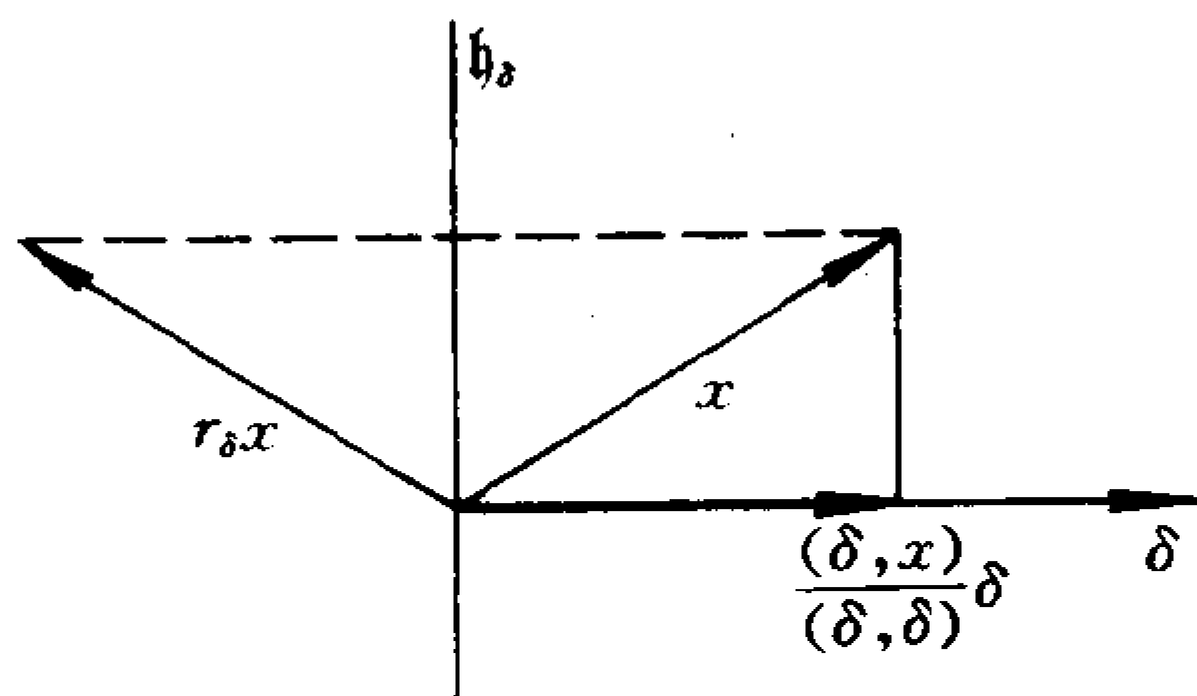


图 2

显然,r_δ 是二阶正交变换,即

$$r_\delta^2 = \text{id}, \tag{2}$$

$$(r_\delta x, r_\delta y) = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{h}_R. \tag{3}$$

而且

$$\mathscr{A} r_\delta \mathscr{A}^{-1} = r_{\mathscr{A}\delta}, \quad \forall \mathscr{A} \in \mathscr{O}(\mathfrak{h}_R), \tag{4}$$

这儿 $\mathscr{O}(\mathfrak{h}_R)$ 表示 $\mathfrak{h}_R$ 的正交变换群.

定义 4.2.1 设 Δ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的根系. 由 $\{r_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ 生成的 $\mathscr{O}(\mathfrak{h}_R)$ 的子群 $W_\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Weyl 群**.

在不引起混淆时,也将 $W_\mathfrak{g}$ 简记为 W.

引理 4.2.1 设 Δ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，W 为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群，则下面结果成立：

1） $w(\Delta) = \Delta, \forall w \in W$；

2） W 是有限群；

3） 若 Ω_Π 是一个 Weyl 房，$w \in W$，则 $w(\Omega_\Pi)$ 也是一个 Weyl 房，且对应素根系为 $w(\Pi)$，即

$$w(\Omega_\Pi) = \Omega_{w(\Pi)}; \tag{5}$$

4） 若 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 为一素根系，则 W 由 $r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \cdots, r_{\alpha_n}$ 生成.

证 1） 因为 W 由 $r_\alpha(\alpha \in \Delta)$ 生成，故我们只要证明 $r_\alpha(\Delta) = \Delta$.

设 $\alpha, \beta \in \Delta$，过 β 的 α-链为 $\{\beta + k\alpha \mid -p \leqslant k \leqslant q\}$，于是由定理 3.2.3 的推论知

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Delta.$$

又注意到 $r_\alpha^2 = \mathrm{id}$，故

$$r_\alpha(\Delta) \subseteq \Delta = r_\alpha^2(\Delta) \subseteq r_\alpha(\Delta),$$

于是 $r_\alpha(\Delta) = \Delta$，即结论 1） 成立.

2） 由于 Δ 是有限集，而且 Δ 包含有 $\mathfrak{h}_R$ 的基，故 $w(\alpha) = \alpha(\forall \alpha \in \Delta)$ 当且仅当 $w = \mathrm{id}$. 于是 W 与有限集 Δ 上的对称群 S_Δ 的一个子群同构，故 W 为有限群.

3） 由于 $w \in W$，故 $w \in \mathscr{O}(\mathfrak{h}_R)$. 因此由结论 1） 知 $x \in \mathfrak{h}_R$ 为正则元当且仅当 $w(x)$ 为正则元，故

$$w\Big(\mathfrak{h}_R - \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{h}_\alpha\Big) = \mathfrak{h}_R - \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{h}_\alpha.$$

又 $w \in \mathscr{O}(\mathfrak{h}_R)$，故 w 将正则元集的连通分支变为正则元集的连通分支，也就是将 Weyl 房变为 Weyl 房. 又若 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 为一素根系，对应的 Weyl 房为 Ω_Π，于是

$$w(\Omega_\Pi) = \{w(x) \in \mathfrak{h}_R \mid (x, \alpha_i) > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$= \{w(x) \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} \mid (w(x), w(\alpha_i)) > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$$
$$= \Omega_{w(\Pi)}.$$

4) 设$\{r_{\alpha_i} \mid \alpha_i \in \Pi\}$生成的$W$的子群为$W'$,又设$\alpha \in \Delta$.由定理4.1.3知,存在素根系$\Pi'$使得$\alpha \in \Pi'$.取$x \in \Omega_\Pi, x' \in \Omega_{\Pi'}$.由于$W'$为有限群,故有$w_0 \in W'$使得

$$|w_0(x') - x| = \min_{w \in W'}\{|w(x') - x|\}.$$

如果$w_0(x') \overline{\in} \Omega_\Pi$,则有$\alpha_i \in \Pi$使得

$$(w_0(x'), \alpha_i) < 0.$$

又

$$r_{\alpha_i} w_0(x') = w_0(x') - \frac{2(\alpha_i, w_0(x'))}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i,$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&(r_{\alpha_i} w_0(x') - x, r_{\alpha_i} w_0(x') - x) \\
&\quad = (w_0(x') - x, w_0(x') - x) + \frac{4(\alpha_i, w_0(x'))(x, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \\
&\quad < (w_0(x') - x, w_0(x') - x).
\end{aligned}$$

这与w_0的取法矛盾,故$w_0(x') \in \Omega_\Pi$.因而有$w_0(\Omega_{\Pi'}) = \Omega_\Pi$,故有$w_0(\alpha) \in \Pi$.于是

$$r_\alpha = r_{w_0^{-1}(w_0(\alpha))} = w_0^{-1} r_{w_0(\alpha)} w_0 \in W',$$

故$W' = W$,即W由$\{r_{\alpha_i} \mid \alpha_i \in \Pi\}$生成. ▎

从这个引理的结论3)与结论4)的证明看出:可将W看成作用在所有Weyl房的集合$\{\Omega_\Pi\}$上,或作用在所有可能的素根系的集合$\{\Pi\}$上.这种作用是可递的.为讨论进一步的性质,我们先介绍下面的定义.

定义4.2.2 设$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$为素根系.记$r_i = r_{\alpha_i}, 1 \leqslant i \leqslant n$.若$w \in W$,且$w \neq \mathrm{id}$,则存在$i_1, i_2, \cdots, i_t$使得

$$w = r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_t}.$$

对w的所有可能的上述表示有集合$\{t\}$,此集合的最小值$l(w) =$

$\min\{t \mid w = r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_t}\}$ 称为 w 的**长度**. 规定 id 的长度为零,即 $l(\mathrm{id}) = 0$.

显然,若

$$w = r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_s} r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_t}, \quad l(w) = s + t,$$

则

$$l\left(r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_s}\right) = s, \quad l\left(r_{j_1} r_{j_2} \cdots r_{j_t}\right) = t.$$

引理 4.2.2 设 $w \in W$,则 $l(w) = 1$ 当且仅当存在 i,使得 $w = r_i$. 而且这时有

$$r_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \tag{6}$$

$$r_i(\Delta_+ - \{\alpha_i\}) = \Delta_+ - \{\alpha_i\}. \tag{7}$$

证 除(7)外,这个引理的结论是显然的. 因而我们只要证明(7)式就可以了.

设 $\alpha \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}$,于是有

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} k_j \alpha_j, \quad k_j \in \mathbf{Z}_+,$$

且有 $j_0 \neq i$,使 $k_{j_0} \neq 0$. 于是

$$r_i(\alpha) = \sum_{j \neq i} k_j \alpha_j + \left(k_i - \frac{2(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\right) \alpha_i.$$

由于 $k_{j_0} > 0$, $r_i(\alpha) \in \Delta$,故 $r_i(\alpha) \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}$. 因而(7)式成立.

▮

定理 4.2.3 Weyl 群在所有 Weyl 房的集合上(或所有可能的素根系的集合上)的作用是单可递的.

证 由引理 4.2.1 知,W 在 $\{\Omega_\Pi\}$(或 $\{\Pi\}$)上的作用是可递的. 若 Δ_+ 为对应于素根系 Π 的正根系,又设 $w \in W$. 显然,$w(\Pi) = \Pi$ 当且仅当 $w(\Delta_+) = \Delta_+$. 因而为证明此定理,我们只要证明 $w(\Delta_+) = \Delta_+$ 当且仅当 $w = \mathrm{id}$. 换言之,我们只要证明 $l(w) \geqslant 1$ 时,$w(\Pi) \neq \Pi$.

设 $l(w) = t$,且

$$w = r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_t}.$$

若 $t = 1$，则 $r_{i_1}(\alpha_{i_1}) = -\alpha_{i_1} \in \Delta_-$. 若 $t = 2$，则有 $i_1 \neq i_2$. 于是 $r_{i_1} r_{i_2}(\alpha_{i_2}) = -r_{i_1}(\alpha_{i_2}) \in \Delta_-$. 一般，有

$$w(\alpha_{i_t}) \in \Delta_-.$$

若不然，设

$$w(\alpha_{i_t}) = -r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t}) \in \Delta_+,$$

即

$$r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t}) \in \Delta_-,$$

观察 Δ 中序列：

$$\alpha_{i_t},\ r_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t}),\ r_{i_{t-2}} r_{i_{t-1}}(\alpha_{i_t}), \cdots, \left(\prod_{k=1}^{t-1} r_{i_k}\right)(\alpha_{i_t}),$$

其中第一项在 Δ_+ 中，最后一项在 Δ_- 中，因而有 $s \leqslant t-1$ 使得

$$\beta_s = \left(\prod_{k=s}^{t-1} r_{i_k}\right)(\alpha_{i_t}) \in \Delta_+, \quad r_{i_{s-1}}(\beta_s) = \left(\prod_{k=s-1}^{t-1} r_{i_k}\right)(\alpha_{i_t}) \in \Delta_-.$$

因而由引理 4.2.2 知

$$\beta_s = \alpha_{i_{s-1}}, \quad r_{i_{s-1}}(\beta_s) = -\alpha_{i_{s-1}}.$$

又由(4)式知

$$r_{i_{s-1}} = \left(\prod_{k=s}^{t-1} r_{i_k}\right) r_{i_t} \left(\prod_{k=s}^{t-1} r_{i_k}\right)^{-1},$$

于是

$$\begin{aligned} w &= \left(\prod_{j=1}^{s-2} r_{i_j}\right)\left(\prod_{k=s}^{t-1} r_{i_k}\right) r_{i_t} \left(\prod_{k=s}^{t-1} r_{i_k}\right)^{-1} \left(\prod_{k=s}^{t-1} r_{i_k}\right) r_{i_t} \\ &= r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_{s-2}} r_{i_s} \cdots r_{i_{t-1}}. \end{aligned}$$

由此得 $l(w) \leqslant t-2$，这与 $l(w) = t$ 矛盾，故 $w(\Pi) \neq \Pi$，即 W 在 $\{\Pi\}$（或 $\{\Omega_\Pi\}$）上的作用是单可递的. ▌

由定理 3.4.3 我们知道复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 不是单李代数当且仅当其素根系是可约的，或者说其素根系所对应的 Dynkin 图不是连通的. 此种性质在 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群上也有所反映.

定理 4.2.4 如果复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \tag{8}$$

则 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群 $W_\mathfrak{g}$ 有正规子群的直积分解

$$W_\mathfrak{g} = W_{\mathfrak{g}_1} \otimes W_{\mathfrak{g}_2}. \tag{9}$$

证 设 Π 为 $\mathfrak{g}$ 对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ 的素根系. 于是 $\mathfrak{g}_i$ 对 $\mathfrak{h}_i$ 有素根系 Π_i,满足:

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, \quad (\Pi_1, \Pi_2) = 0. \tag{10}$$

显然 $W_{\mathfrak{g}_i}$ 由 $\{r_\alpha | \alpha \in \Pi_i\}$ 生成. 又若 $\alpha \in \Pi_1, \beta \in \Pi_2$,于是

$$r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha = \beta, \quad r_\beta(\alpha) = \alpha.$$

因而

$$r_\alpha r_\beta = r_\beta r_\alpha.$$

进而

$$w_1 w_2 = w_2 w_1, \quad \forall\, w_1 \in W_{\mathfrak{g}_1}, w_2 \in W_{\mathfrak{g}_2},$$

而且

$$w_1(\Pi_2) = \Pi_2, \quad w_2(\Pi_1) = \Pi_1.$$

设 $w \in W_{\mathfrak{g}_1} \cap W_{\mathfrak{g}_2}$. 于是

$$w(\Pi) = w(\Pi_1 \cup \Pi_2) = w(\Pi_1) \cup w(\Pi_2) = \Pi.$$

由定理 4.2.3 知 $w = \mathrm{id}$,即 $W_{\mathfrak{g}_1} \cap W_{\mathfrak{g}_2} = \{\mathrm{id}\}$. 又从 $W_\mathfrak{g}$ 由 $\{r_\alpha | \alpha \in \Pi\}$ 生成知

$$W_\mathfrak{g} = W_{\mathfrak{g}_1} \otimes W_{\mathfrak{g}_2}. \quad \blacksquare$$

推论 设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解(8),对应的 Weyl 群的分解为(9),又设 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ 分别为 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 的根系,则

$$\Delta_i = W_\mathfrak{g}(\Pi_i) = W_{\mathfrak{g}_i}(\Pi_i), \quad i = 1, 2.$$

事实上,我们已经证明

$$W_{\mathfrak{g}_1}(\Pi_2) = \Pi_2, \quad W_{\mathfrak{g}_2}(\Pi_1) = \Pi_1.$$

于是

$$\Delta_i = W_{\mathfrak{g}_i}(\Pi_i) = \left(W_{\mathfrak{g}_1} \otimes W_{\mathfrak{g}_2}\right)(\Pi_i) = W_\mathfrak{g}(\Pi_i). \quad \blacksquare$$

注 在定理4.2.4的证明中，我们只用到素根系Π的分解式(10)，并未用到$\mathfrak{g}$的分解式(8). 于是，这个定理及其推论实际上给出了素根系可约则$\mathfrak{g}$不是单李代数的结论，即单李代数的素根系一定是不可约的.

习　题

1. 设Δ、Δ_+、Π分别为复半单李代数$\mathfrak{g}$对其Cartan子代数的根系、正根系、素根系. 又设W是$\mathfrak{g}$的Weyl群，对$w\in W$，记

$$\Sigma_w=\{\alpha\in\Delta_+\mid w(\alpha)\in\Delta_-\}.$$

试证下述结论：

1） $\Sigma_w=\varnothing$，当且仅当$w=\mathrm{id}$.

2） 若$\alpha\in\Pi$，则$\Sigma_{r_\alpha}=\{\alpha\}$.

3） $\Sigma_{w_1}=\Sigma_{w_2}$，当且仅当$w_1=w_2$.

4） 若$\Sigma_w\neq\Delta_+$，则$\Pi\backslash\Sigma_w\neq\varnothing$；
若$\Sigma_w\neq\varnothing$，则$\Pi\cap\Sigma_w\neq\varnothing$.

5） 设$w\in W$，$\alpha\in\Pi$，则

$$\Sigma_{wr_\alpha}=\begin{cases}r_\alpha(\Sigma_w)\cup\{\alpha\}, & 若\ \alpha\in\Pi\backslash\Sigma_w;\\ r_\alpha(\Sigma_w\backslash\{\alpha\}), & 若\ \alpha\in\Pi\cap\Sigma_w.\end{cases}$$

6） 设$w\in W$，$l(w)=t$，$w=r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_t}$(这里$r_{i_j}=r_{\alpha_{i_j}}$，$\{\alpha_{i_j}\}=\Pi$)，则$\alpha_{i_t}\in\Sigma_w$.

7） $\forall\, w\in W$，则

$$l(w)=|\Sigma_w|.$$

2. 设Δ，Δ_+，Π，W，Σ_w都如习题1所述. 对$l\in\mathbf{Z}_+$，令

$$n(l)=|\{w\in W\mid l(w)=l\}|.$$

试证

1） $n(l)=0$，当$l>|\Delta_+|$；
$n(l)>0$，当$0\leqslant l\leqslant|\Delta_+|$.

2） 存在唯一的$w_0\in W$满足

$$l(w_0)=|\Delta_+|,$$

而且 $w_0^2 = \mathrm{id}$.

3) $l(w_0 w) = |\Delta_+| - l(w)$;

$n(l) = n(|\Delta_+| - l), \quad \forall\, 0 \leqslant l \leqslant |\Delta_+|$.

3. 求出 G_2 的 Weyl 群.

§3 典型李代数的 Weyl 群

本节给出典型单李代数 $sl(n+1,\boldsymbol{C})$, $so(2n,\boldsymbol{C})$, $so(2n+1,\boldsymbol{C})$ 及 $sp(n,\boldsymbol{C})$ 的 Weyl 群. 这四类单李代数所对应的 Dynkin 图分别为 A_n, D_n, B_n 及 C_n.

定理 4.3.1 $sl(n+1,\boldsymbol{C})(n \geqslant 1)$ 的 Weyl 群 W 同构于 $n+1$ 个文字的对称群 S_{n+1}.

证 由定理 3.6.1 知, $sl(n+1,\boldsymbol{C})$ 中可取

$$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}} = \left\{\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}) \,\middle|\, a_i \in \boldsymbol{R}, \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 0\right\},$$

而且根系为

$$\Delta = \{\lambda_i - \lambda_j \mid i \neq j\},$$

其中

$$\lambda_i - \lambda_j = \frac{1}{2(n+1)}(E_{ii} - E_{jj}).$$

设 $h = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$, $\alpha = \lambda_i - \lambda_j$. 于是

$$\begin{aligned} r_\alpha(h) &= h - \frac{2(\alpha, h)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = h - \left(\frac{2\mathrm{tr}(\alpha h)}{\mathrm{tr}\alpha^2}\right)\alpha \\ &= h - (a_i - a_j)(E_{ii} - E_{jj}) \\ &= \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \cdots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \cdots, a_{n+1}), \end{aligned}$$

即 r_α 是将文字 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 中的 a_i 与 a_j 对换. 于是 W 与 S_{n+1} 同构. ▌

定理 4.3.2 $so(2n+1,\boldsymbol{C})$ 与 $sp(n,\boldsymbol{C})$ 的 Weyl 群都同构于 2^n 阶的正规初等 2-子群与 S_n 的半直积, 这里 $n \geqslant 2$.

证 如同定理 3.6.2, 我们仍然以与 $so(2n+1,\boldsymbol{C})$ 同构的

$g(2n+1,S,C)$ 代替 $so(2n+1,C)$,此时可取

$$\mathfrak{h}_R = \{\mathrm{diag}(0,a_1,a_2,\cdots,a_n,-a_1,-a_2,\cdots,-a_n) \mid a_i \in \boldsymbol{R}\},$$

其对应的根系为

$$\Delta = \{\pm\lambda_k, \pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_i + \lambda_j) \mid 1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant i < j \leqslant n\},$$

其中

$$\lambda_i = \frac{1}{2(2n-1)}(E_{1+i,1+i} - E_{n+1+i,n+1+i}).$$

因而由定理 2.8.2 知

$$(\lambda_i,\lambda_j) = \frac{1}{2(2n-1)}\delta_{ij}.$$

显然, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\mathfrak{h}_R$ 的一组基. 设 $h = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i \in \mathfrak{h}_R$,则

$$r_{\lambda_i}(h) = \sum_{j\neq i} x_j\lambda_j - x_i\lambda_i.$$

又

$$r_{\lambda_i} r_{\lambda_j} = r_{\lambda_j} r_{\lambda_i}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$$

由此可知 $\{r_{\lambda_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 生成 W 中一个 2^n 阶的初等 2-群,记为 W_1.

又

$$\begin{aligned} r_{\lambda_i-\lambda_j}(h) &= h - \frac{2(\lambda_i - \lambda_j, h)}{(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i - \lambda_j)}(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= h - (x_i - x_j)(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= \sum_{k\neq i,j} x_k\lambda_k + x_i\lambda_j + x_j\lambda_i, \end{aligned}$$

因而 $r_{\lambda_i-\lambda_j}$ 是将 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中 x_i 与 x_j 对换. 故 $\{r_{\lambda_i-\lambda_j}\}$ 生成的 W 的子群与 S_n 同构,记此群为 W_2.

注意到

$$r_{\lambda_j}(\lambda_i - \lambda_j) = \lambda_i + \lambda_j,$$

于是

$$r_{\lambda_i+\lambda_j}=r_{\lambda_j}r_{\lambda_i-\lambda_j}r_{\lambda_j}.$$

因而 W 由 W_1 与 W_2 生成. 又

$$r_{\lambda_i-\lambda_j}(\lambda_k)=\begin{cases}\lambda_k, & k\neq i,j,\\ \lambda_i, & k=j,\\ \lambda_j, & k=i,\end{cases}$$

即

$$r_{\lambda_i-\lambda_j}r_{\lambda_k}r_{\lambda_i-\lambda_j}=\begin{cases}r_{\lambda_k}, & k\neq i,j,\\ r_{\lambda_i}, & k=j,\\ r_{\lambda_j} & k=i.\end{cases}$$

因而 W_1 是 W 的正规子群. 故 W 是 W_1 与 W_2 的半直积,即 $W=W_1\rtimes W_2$.

从定理 3.6.4 知 $sp(n,\boldsymbol{C})$ 有 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h}=\{\operatorname{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)\,|\,x_i\in\boldsymbol{C}\},$$

对应的根系

$$\Delta=\{\pm(\lambda_i-\lambda_j),\pm(\lambda_i+\lambda_j),\pm 2\lambda_k \\ |1\leqslant i<j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant n\},$$

其中

$$\lambda_i=\frac{1}{4(n+1)}(E_{ii}-E_{n+i,n+i}),\quad (\lambda_i,\lambda_j)=\frac{1}{4(n+1)}\cdot\delta_{ij}.$$

这时

$$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=\{\operatorname{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)\,|\,x_i\in\boldsymbol{R}\}$$

有基 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,设 $h=x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+\cdots+x_n\lambda_n\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$.

$$\begin{aligned}r_{2\lambda_i}(h)&=h-\frac{2(2\lambda_i,h)}{(2\lambda_i,2\lambda_i)}\cdot 2\lambda_i=h-2x_i\lambda_i\\&=\sum_{j\neq i}x_j\lambda_j-x_i\lambda_i.\end{aligned}$$

由于

$$r_{2\lambda_i}r_{2\lambda_j}=r_{2\lambda_j}r_{2\lambda_i},$$

故 $\{r_{2\lambda_i}\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成的 W 的子群 W_1 为 2^n 阶的初等 2-群.

又

$$r_{\lambda_i-\lambda_j}(h)=h-\frac{2(\lambda_i-\lambda_j,h)}{(\lambda_i-\lambda_j,\lambda_i-\lambda_j)}(\lambda_i-\lambda_j)$$
$$=h-(x_i-x_j)(\lambda_i-\lambda_j)$$
$$=\sum_{k\neq i,j}x_k\lambda_k+x_i\lambda_j+x_j\lambda_i,$$

即 $r_{\lambda_i-\lambda_j}$ 是将 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的 x_i 与 x_j 对换，故 $\{r_{\lambda_i-\lambda_j}|i\neq j\}$ 生成的 W 的子群 W_2 与 S_n 同构.

又由于

$$r_{2\lambda_j}(\lambda_i-\lambda_j)=\lambda_i+\lambda_j,$$

于是

$$r_{\lambda_i+\lambda_j}=r_{2\lambda_j}r_{\lambda_i-\lambda_j}r_{2\lambda_j},$$

因而 W 由 W_1 与 W_2 生成.

最后注意到

$$r_{\lambda_i-\lambda_j}(2\lambda_k)=\begin{cases}2\lambda_k, & k\neq i,j,\\ 2\lambda_j, & k=i,\\ 2\lambda_i, & k=j,\end{cases}$$

由此知

$$r_{\lambda_i-\lambda_j}r_{2\lambda_k}r_{\lambda_i-\lambda_j}=\begin{cases}r_{2\lambda_k}, & k\neq i,j,\\ r_{2\lambda_j}, & k=i,\\ r_{2\lambda_i}, & k=j.\end{cases}$$

故 W_1 是 W 的正规子群. 因而 $W=W_1\rtimes W_2$. ▌

定理 4.3.3 $so(2n,\boldsymbol{C})(n\geqslant 4)$ 的 Weyl 群 W 同构于一个 2^{n-1} 阶的正规初等 2-子群与 S_n 的半直积.

证 如同定理 3.6.3，以与 $so(2n,\boldsymbol{C})$ 同构的 $g(2n,S_1,\boldsymbol{C})$ 代替 $so(2n,\boldsymbol{C})$. 此时有 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n,-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)|x_i\in\boldsymbol{C}\},$$

对此 Cartan 子代数的根系为

$$\Delta=\{\pm(\lambda_i-\lambda_j),\pm(\lambda_i+\lambda_j)|1\leqslant i<j\leqslant n\},$$

其中

$$\lambda_i = \frac{1}{4(n-1)}(E_{ii} - E_{n+i,n+i}),$$

$$(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{4(n-1)}\delta_{ij}.$$

于是

$$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}} = \{\mathrm{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n, -x_1, -x_2, \cdots, -x_n) \mid x_i \in \boldsymbol{R}\},$$

并有基 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 对 $h = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \in \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$, 则

$$\begin{aligned} r_{\lambda_i - \lambda_j}(h) &= h - \frac{2(\lambda_i - \lambda_j, h)}{(\lambda_i - \lambda_j, \lambda_i - \lambda_j)}(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= h - (x_i - x_j)(\lambda_i - \lambda_j) \\ &= \sum_{k \neq i,j} x_k \lambda_k + x_i \lambda_j + x_j \lambda_i, \end{aligned}$$

即 $r_{\lambda_i - \lambda_j}$ 是将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中 x_i 与 x_j 对换, 故 $\{r_{\lambda_i - \lambda_j} \mid i \neq j\}$ 生成的 W 的子群 W_2 与 S_n 同构.

又

$$\begin{aligned} r_{\lambda_i + \lambda_j}(h) &= h - \frac{2(\lambda_i + \lambda_j, h)}{(\lambda_i + \lambda_j, \lambda_i + \lambda_j)}(\lambda_i + \lambda_j) \\ &= h - (x_i + x_j)(\lambda_i + \lambda_j) \\ &= \sum_{k \neq i,j} x_k \lambda_k - x_i \lambda_j - x_j \lambda_i, \end{aligned}$$

于是

$$r_{\lambda_i - \lambda_j} r_{\lambda_i + \lambda_j}(h) = \sum_{k \neq i,j} x_k \lambda_k - x_i \lambda_i - x_j \lambda_j,$$

即 $r_{\lambda_i - \lambda_j} r_{\lambda_i + \lambda_j}$ 是将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中 x_i, x_j 换成 $-x_i, -x_j$. 于是 $\{r_{\lambda_i - \lambda_j} r_{\lambda_i + \lambda_j} \mid i \neq j\}$ 生成的 W 的子群 W_1 是 2^{n-1} 阶的初等 2-群, W 由 W_1 与 W_2 生成. 又若

$$r_{\lambda_k - \lambda_l}(\lambda_i - \lambda_j) = \lambda_s - \lambda_t,$$

则

$$r_{\lambda_k - \lambda_l}(\lambda_i + \lambda_j) = \lambda_s + \lambda_t.$$

于是

$$r_{\lambda_k-\lambda_l}(r_{\lambda_i-\lambda_j}r_{\lambda_i+\lambda_j})r_{\lambda_k-\lambda_l}=r_{\lambda_s-\lambda_t}r_{\lambda_s+\lambda_t}.$$

因而 W_1 是 W 的正规子群. 于是 $W=W_1\rtimes W_2$. ▌

注 以 F_4、E_6、E_7 与 E_8 为 Dynkin 图的单李代数的 Weyl 群结构较为复杂. 但现在已求出它们的阶为 $2^7\cdot 3^2, 2^7\cdot 3^4\cdot 5, 2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$ 与 $2^{14}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$. 以 G_2 为 Dynkin 图的单李代数的 Weyl 群读者可作为一个习题(见习题 2).

习　题

1. 试求 $so(4,\mathbf{C})$ 的 Weyl 群.

2. 试求以 G_2 为 Dynkin 图的单李代数的 Weyl 群.

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为单李代数, Δ,Δ_+,Π 分别为 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系, 正根系, 素根系. 又 W 为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群, $w_0\in W$, 满足 $l(w_0)=|\Delta_+|$. 试证下面结论:

1) $\mathfrak{g}$ 为 $so(2n+1,\mathbf{C})$ 或 $sp(n,\mathbf{C})$ 时, $w_0=-\mathrm{id}$.

2) $\mathfrak{g}=sl(n+1,\mathbf{C}), \Pi=\{\alpha_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 时,

$$w_0(\alpha_i)=-\alpha_{n-i+1},\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

3) $\mathfrak{g}=so(2n,\mathbf{C})\ (n\geqslant 4), \Pi=\{\alpha_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}, \alpha_n=\lambda_{n-1}+\lambda_n\mid 1\leqslant i\leqslant n-1\}$ 时, 则有:

n 为偶数时, $w_0=-\mathrm{id}$;

n 为奇数时,

$$w_0(\alpha_k)=\begin{cases}-\alpha_k, & 1\leqslant k\leqslant n-2,\\ -\alpha_n, & k=n-1,\\ -\alpha_{n-1}, & k=n.\end{cases}$$

4. 设 W 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的 Weyl 群, $w\in W$. 令

$$w(h_1+\sqrt{-1}h_2)=w(h_1)+\sqrt{-1}w(h_2),\quad h_1,h_2\in\mathfrak{h}_{\mathbf{R}},$$

则 $w\in GL(\mathfrak{h})$, 因而 W 也可作为 $GL(\mathfrak{h})$ 的子群.

§ 4 Weyl 群与内自同构

本节我们将讨论复半单李代数的 Weyl 群与内自同构群之间的关系. 这个关系对于证明复半单李代数的存在性定理与分类定理都是至关重要的.

我们先从一般的复李代数开始讨论.

定义 4.4.1 设 $\mathfrak{g}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的有限维李代数, 设 $x \in \mathfrak{g}$. 若存在 $y \in \mathfrak{g}, \lambda \in \boldsymbol{C}, \lambda \neq 0$, 以及 $k \in \boldsymbol{N}$ 使得

$$(\mathrm{ad}y - \lambda \mathrm{id})^k x = 0, \tag{1}$$

则称 x 为 $\mathfrak{g}$ 的**强**(ad-) **幂零元**.

关于强幂零元有下面一些性质:

1) 若 x 是强幂零元, 则 $\mathrm{ad}x$ 是幂零的, 因而 $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}x} \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}$. 今后, 以 $\mathscr{N}(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 中所有强幂零元的集合, 而以 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 表示由 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}x} | x \in \mathscr{N}(\mathfrak{g})\}$ 生成的 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 的子群.

事实上, 设 x 为强幂零元, 故有 $y \in \mathfrak{g}, \lambda \in \boldsymbol{C}, \lambda \neq 0$ 及 $k \in \boldsymbol{N}$, 使(1) 式成立. 设 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathrm{ad}y$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_\mu(\mathrm{ad}y),$$

由定理 2.2.3 知

$$(\mathrm{ad}x)^n \mathfrak{g}_\mu(\mathrm{ad}y) \subseteq \mathfrak{g}_{\mu+n\lambda}(\mathrm{ad}y),$$

其中 $n = \dim\mathfrak{g}$. 由 $\lambda \neq 0$, 得出 $(\mathrm{ad}x)^n = 0$, 即 $\mathrm{ad}x$ 是幂零的. 由定理 1.5.4 知 $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}x} \in \mathrm{Int}\mathfrak{g}$, 故 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 的子群.

2) 若 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 则

$$\mathscr{N}(\mathfrak{g}_1) \subseteq \mathscr{N}(\mathfrak{g}).$$

3) 若 φ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构, 即 $\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 则

$$\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{g})) = \mathscr{N}(\mathfrak{g}).$$

4) $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的正规子群, 即

$$\mathscr{E}(\mathfrak{g}) \lhd \mathrm{Aut}\mathfrak{g}.$$

事实上，设 $x \in \mathscr{N}(\mathfrak{g})$，$\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$，则 $\varphi(x) \in \mathscr{N}(\mathfrak{g})$，而且

$$\varphi\, e^{\mathrm{ad}x}\varphi^{-1} = e^{\mathrm{ad}\varphi(x)} \in \mathscr{E}(\mathfrak{g}),$$

于是 $\mathscr{E}(\mathfrak{g}) \lhd \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$.

5) 设 $\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 记 $\{e^{\mathrm{ad}x} \mid x \in \mathscr{N}(\mathfrak{g}_1)\}$ 生成的 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 的子群为 $\mathscr{E}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1)$，则 $\mathscr{E}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1)$ 使 $\mathfrak{g}_1$ 不变，且在 $\mathfrak{g}_1$ 上的限制恰为 $\mathscr{E}(\mathfrak{g}_1)$.

现在我们讨论 $\mathfrak{g}$ 为复半单李代数时，$\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 与 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群的关系.

定理4.4.1 设 $\mathfrak{g}$ 为复半单李代数，$\mathfrak{h}$ 为其Cartan子代数，Δ 为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系，$\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 为 Δ 生成的实线性空间，W 为对应的 Weyl 群，则对任一 $w \in W$，存在 $\theta \in \mathscr{E}(\mathfrak{g})$，使得 $\theta(\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}) = \mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$，而且 θ 在 $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 上的限制为 w，即

$$w = \theta|_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}}. \tag{2}$$

证 我们只要证明 $\forall\, \alpha \in \Delta$，存在 $\theta_\alpha \in \mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $r_\alpha = \theta_\alpha|_{\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}}$ 就可以了.

显然，$\mathfrak{g}_\alpha \cup \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathscr{N}(\mathfrak{g})$. 取 $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，$X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)},$$

于是

$$\theta_\alpha = e^{\mathrm{ad}X_\alpha} e^{\mathrm{ad}(-X_{-\alpha})} e^{\mathrm{ad}X_\alpha} \in \mathscr{E}(\mathfrak{g}).$$

记 $\dfrac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)} = \alpha^\vee$，因而

$$\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cdot\alpha^\vee \dotplus \mathfrak{h}_\alpha,$$

其中 $\mathfrak{h}_\alpha = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbf{R}} \mid (x,\alpha) = (x,\alpha^\vee) = 0\}$.

若 $h \in \mathfrak{h}_\alpha$，则

$$\mathrm{ad}X_\alpha(h) = -\,\mathrm{ad}X_{-\alpha}(h) = 0,$$

因而

$$\theta_\alpha(h) = h, \quad \forall\, h \in \mathfrak{h}_\alpha.$$

而由

$$\mathrm{ad}X_\alpha(\alpha^\vee)=-2X_\alpha,\quad (\mathrm{ad}X_\alpha)^2(\alpha^\vee)=0;$$
$$-\mathrm{ad}X_{-\alpha}(\alpha^\vee)=-2X_{-\alpha},\quad (\mathrm{ad}X_{-\alpha})^2(\alpha^\vee)=0;$$
$$-\mathrm{ad}X_{-\alpha}(X_\alpha)=\alpha^\vee,\quad \mathrm{ad}X_\alpha(X_{-\alpha})=\alpha^\vee$$
可得
$$\begin{aligned}\theta_\alpha(\alpha^\vee)&=\mathrm{e}^{\mathrm{ad}X_\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(-X_{-\alpha})}(\alpha^\vee-2X_\alpha)\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{ad}X_\alpha}\Big(\alpha^\vee-2X_\alpha+[-X_{-\alpha},\alpha^\vee-2X_\alpha]\\&\qquad+\frac{1}{2}[-X_{-\alpha},[-X_{-\alpha},\alpha^\vee-2X_\alpha]]\Big)\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{ad}X_\alpha}(-\alpha^\vee-2X_\alpha)\\&=-\alpha^\vee-2X_\alpha+[X_\alpha,-\alpha^\vee-2X_\alpha]\\&=-\alpha^\vee.\end{aligned}$$
因而$\theta_\alpha(\mathfrak{h}_R)=\mathfrak{h}_R$,且$\theta_\alpha|_{\mathfrak{h}_R}=r_\alpha$. ▌

推论 若$\theta\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$,且存在$w\in W$,使(2)式成立,则$\theta(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$.

这是因为$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_R+\sqrt{-1}\mathfrak{h}_R$. 于是由$\theta(\mathfrak{h}_R)=\mathfrak{h}_R$知$\theta(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$.

我们知道,对于无限维的线性空间的线性变换$\mathscr{A}$,一般来说$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathscr{A}^n$不一定有意义. 为今后的需要,我们引进下面的概念.

定义 4.4.2 设V是复数域$\boldsymbol{C}$上的线性空间. V的线性变换$\mathscr{A}$称为**局部幂零的**,如果$\forall v\in V,\exists N(v)\in\boldsymbol{N}$,使得
$$\mathscr{A}^{N(v)}v=0.\tag{3}$$

显然,若$\dim V<\infty$,则$\mathscr{A}$局部幂零当且仅当$\mathscr{A}$是幂零的.

又若W是$\mathscr{A}$的有限维不变子空间,则$\mathscr{A}$在W上的限制$\mathscr{A}|_W$是幂零的,于是
$$\exp\mathscr{A}|_W=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathscr{A}|_W)^n$$
是W的可逆线性变换. 又若W_1也是$\mathscr{A}$的有限维不变子空间. 显然$W_1\cap W\subseteq W,W_1\cap W\subseteq W_1$,且

$$(\mathscr{A}|_W)\Big|_{W_1\cap W} = (\mathscr{A}|_{W_1})\Big|_{W_1\cap W} = \mathscr{A}|_{W_1\cap W}.$$

因而

$$\exp(\mathscr{A}|_W)\Big|_{W_1\cap W} = \exp(\mathscr{A}|_{W_1})\Big|_{W_1\cap W} = \exp(\mathscr{A}|_{W_1\cap W}).$$

从上面讨论,可以得到下面结论:

若 $\mathscr{A}$ 是 V 的局部幂零线性变换,则有 V 的可逆线性变换 $\exp\mathscr{A}$ 定义为

$$(\exp\mathscr{A})v = \sum_{t=0}^{N(v)-1}\frac{1}{t!}\mathscr{A}^t\cdot v, \tag{4}$$

其中 $N(v)\in \boldsymbol{N}$,使(3)式成立.

事实上,容易得到

$$(\exp\mathscr{A})^{-1} = \exp(-\mathscr{A}). \tag{5}$$

又若 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间,则

$$(\exp\mathscr{A})|_W = \exp(\mathscr{A}|_W). \tag{6}$$

定理 4.4.2 设 $\mathfrak{g}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的李代数. $D\in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$,且为 $\mathfrak{g}$ 的局部幂零线性变换,则

$$\exp D \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}. \tag{7}$$

特别,$x\in\mathfrak{g}$,$\mathrm{ad}x$ 是局部幂零的,则 $\exp(\mathrm{ad}x)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构.

证 因为 D 局部幂零,故 $\exp D$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可逆线性变换. 用定理 1.5.3 证明方法可证 $\exp D\in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$. 由于 $\mathrm{ad}x\in \mathrm{Der}\mathfrak{g}$,于是定理成立. ▌

习 题

1. 证明复李代数 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数当且仅当 $\mathscr{E}(\mathfrak{g}) = \{\mathrm{id}\}$.

2. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单李代数. Δ 是 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系,取 $e_{\pm\alpha}\in\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$,使得 $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = -\alpha$. 试证

$$\exp\left(\mathrm{ad}\frac{\pi}{\sqrt{2(\alpha,\alpha)}}(e_\alpha + e_{-\alpha})\right)\Big|_{\mathfrak{h}_R} = r_\alpha.$$

§5 结合代数的一些结果

我们从定理 1.1.1 知道,可在结合代数 $\mathfrak{a}$ 中定义括积

$$[a,b] = ab - ba, \quad \forall a,b \in \mathfrak{a}, \tag{1}$$

使 $\mathfrak{a}$ 成为一个李代数.

为了回答反过来的问题,即是否任何一个李代数都可以用这种办法得到,我们需要再介绍一些有关结合代数的事实.

定义 4.5.1 若结合代数 $\mathfrak{a}$ 的线性子空间 $\mathfrak{v}$ 又是环 $\mathfrak{a}$ 的理想,则称 $\mathfrak{v}$ 为结合代数 $\mathfrak{a}$ 的**理想**,简称 $\mathfrak{a}$ 的理想.

若 $\mathfrak{v}$ 为 $\mathfrak{a}$ 的理想,则 $\mathfrak{a}/\mathfrak{v}$ 既是线性空间又是环,而且

$$\begin{aligned}\lambda((a+\mathfrak{v})(b+\mathfrak{v})) = \lambda ab + \mathfrak{v} &= (\lambda(a+\mathfrak{v}))(b+\mathfrak{v}) \\ &= (a+\mathfrak{v})(\lambda(b+\mathfrak{v})), \\ &\forall a,b \in \mathfrak{a}, \lambda \in F,\end{aligned}$$

这里 F 为 $\mathfrak{a}$ 的基域.因而 $\mathfrak{a}/\mathfrak{v}$ 也是结合代数,称为 $\mathfrak{a}$ 对 $\mathfrak{v}$ 的**商代数**.以 π 表示 $\mathfrak{a}$ 到 $\mathfrak{a}/\mathfrak{v}$ 的自然映射,即

$$\pi(a) = a + \mathfrak{v}, \quad \forall a \in \mathfrak{a}. \tag{2}$$

显然,π 既是线性同态,又是环同态.我们称 π 为 $\mathfrak{a}$ 到商代数 $\mathfrak{a}/\mathfrak{v}$ 的**自然同态**.

一般,若结合代数 $\mathfrak{a}$ 到结合代数 $\mathfrak{a}_1$ 的映射 ϕ 既是线性同态,又是环同态,则称 ϕ 是**结合代数的同态**,简称同态.

结合代数的同态、同构及同态基本定理等概念及基本理论是容易建立的.读者可作为练习自行完成.

下面两类特殊的结合代数 —— 张量代数与对称代数在李代数理论中特别重要.

定理 4.5.1 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间.令

$$T^0V = F, \quad T^mV = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{m\text{个}}, \tag{3}$$

$$T(V) = T^0V \dotplus T^1V \dotplus \cdots \dotplus T^mV \dotplus \cdots, \tag{4}$$

则在 $T(V)$ 中可定义乘法 $\otimes$ 满足

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_k) \\ = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_k, \qquad (5)$$

使得 $T(V)$ 是含单位元素 1 的结合代数,称为 V 上的**张量代数**. $\otimes$ 称为**张量积**.

又设 I 为 $T(V)$ 中由 $\{u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in V\}$ 生成的理想,即包含 $\{u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in V\}$ 的极小理想,则商代数 $S(V) = T(V)/I$ 是含单位元素 1 的交换代数,称为 V 上的**对称代数**.

证 显然满足(5)的乘法可以双线性地扩充到整个 $T(V)$ 上,而且此乘法满足结合律,于是 $T(V)$ 是结合代数. $T^0V = F$ 的单位元素 1,就是 $T(V)$ 的单位元素.

如果 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 V 的一组基,则 $T(V)$ 有生成元组 $1, v_1, v_2, \cdots, v_n$.

现设 σ 为 $T(V)$ 到 $S(V) = T(V)/I$ 上的自然同态. 于是 $S(V)$ 中乘法为:

$$\sigma(a) \cdot \sigma(b) = \sigma(a \otimes b), \quad \forall\, a, b \in T(V). \qquad (6)$$

由于 $T^0V \cap I = T^1V \cap I = \{0\}$,故 σ 在 T^0V 与 T^1V 上的限制是一一的. 记

$$\sigma(1) = 1, \quad \sigma(v_i) = v_i (1 \leqslant i \leqslant n),$$

故 $1, v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 $S(V)$ 的生成元组. 又由于

$$v_i v_j - v_j v_i = \sigma(v_i \otimes v_j) - \sigma(v_j \otimes v_i) \\ = \sigma(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i) = 0,$$

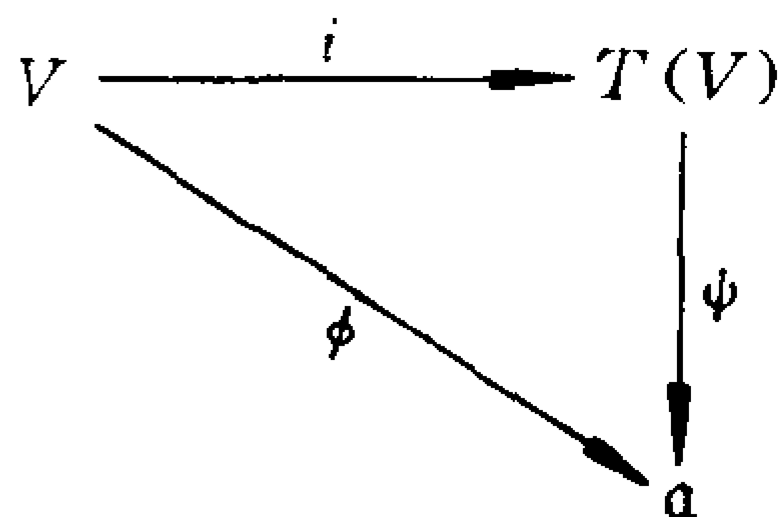
故知 $S(V)$ 是含单位元素 1 的交换结合代数. ▍

下面的定理指出了 $T(V)$ 具有某种"通用"性,并由此得到 $S(V)$ 实际上是 F 上的 n 元多项式代数.

定理 4.5.2 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间,$\mathfrak{a}$ 是 F 上含单位元素 1 的结合代数,ϕ 是 V 到 $\mathfrak{a}$ 的线性映射,i 是 V 到 $T(V)$ 中的嵌入映射(即 $\forall\, v \in V, i(v) = v \in T^1V \subseteq T(V)$),则存在唯一的 $T(V)$ 到 $\mathfrak{a}$ 的结合代数的同态 ψ 满足:

1) 右面的映射图是交换图，即

$$\psi \circ i = \phi; \tag{7}$$



2) ψ 将 $T(V)$ 的单位元素映到 $\mathfrak{a}$ 的单位元素，即

$$\psi(1) = 1. \tag{8}$$

特别，当 $\mathfrak{a} = F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 为 F 上 n 元多项式代数时，$\mathrm{Ker}\psi = \mathfrak{I}$. 故 $S(V)$ 与 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 同构.

证 事实上，我们只要定义 $T(V)$ 到 $\mathfrak{a}$ 上的线性映射 ψ 使得

$$\psi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = \phi(v_1)\phi(v_2)\cdots\phi(v_m), \quad v_i \in V,$$

$$\psi(1) = 1,$$

则 ψ 是 $T(V)$ 到 $\mathfrak{a}$ 的同态，且满足条件(7)，(8). 由于 1 与 V 生成 $T(V)$，故 ψ 是由(7)与(8)唯一决定.

当 $\mathfrak{a} = F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 时，在 V 中取一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，定义 V 到 $\mathfrak{a}$ 中映射 ϕ 如下：

$$\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in F(i = 1, 2, \cdots, n),$$

则 ϕ 是线性的，因而有 $T(V)$ 到 $\mathfrak{a}$ 的同态 ψ. 又由于

$$\begin{aligned}\psi(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i) &= \phi(v_i)\phi(v_j) - \phi(v_j)\phi(v_i) \\ &= x_i x_j - x_j x_i = 0,\end{aligned}$$

故知 $\mathfrak{I} \subseteq \mathrm{Ker}\psi$. 于是由 ψ 诱导出 $S(V)$ 到 $\mathfrak{a}$ 的同态 ψ_1，满足

$$\psi_1 \sigma(a) = \psi(a), \quad \forall\, a \in T(V),$$

其中 σ 为 $T(V)$ 到 $S(V)$ 的自然同态.

由于 $S(V)$ 中任何元素均可表示为

$$\sigma(a) = \sum a_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{n_1 n_2 \cdots n_k} \sigma(v_{i_1})^{n_1} \sigma(v_{i_2})^{n_2} \cdots \sigma(v_{i_k})^{n_k},$$

这里 $\quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n, \quad k = 1, 2, \cdots;$

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{n_1 n_2 \cdots n_k} \in F, \quad n_i \in \mathbf{Z}_+ (i = 1, 2, \cdots, k);$$

求和跑遍 $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$，只有有限个 $a_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{n_1 n_2 \cdots n_k} \neq 0$. 因而

$$\psi_1\sigma(a) = \sum a_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{n_1 n_2 \cdots n_k} x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \cdots x_{i_k}^{n_k},$$

故 $\sigma(a) \neq 0$ 当且仅当 $\psi_1\sigma(a) \neq 0$，ψ_1 是 $S(V)$ 到 $\mathfrak{a}$ 的结合代数同构. 因此，$\mathrm{Ker}\psi = 1$. ▍

推论 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为 V 的基，σ 为 $T(V)$ 到 $S(V)$ 的自然同态. 记 $\sigma(v_i) = v_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $S(V)$ 有基：

$$\left\{1, v_{i_1}^{n_1} v_{i_2}^{n_2} \cdots v_{i_k}^{n_k} \,\middle|\, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n, k \in \boldsymbol{N}, n_i \in \boldsymbol{Z}_+\right\}.$$

这是显然的. ▍

定理 4.5.2 及其推论也说明对称代数 $S(V)$ 对于交换结合代数也有“通用”性.

定义 4.5.2 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的代数(结合代数或者李代数)，M 是交换群(群运算记为加法运算). 如果 $\mathfrak{a}$ 有线性子空间的直和分解

$$\mathfrak{a} = \sum_{\lambda \in M}^{\cdot} \mathfrak{a}_\lambda \tag{9}$$

使得

$$\mathfrak{a}_\lambda \mathfrak{a}_\mu \subseteq \mathfrak{a}_{\lambda+\mu}, \quad \forall\, \lambda, \mu \in M, \tag{10}$$

则称 $\mathfrak{a}$ 是关于 M 的**阶化代数**，$\mathfrak{a}_\lambda$ 中非零元素称为 λ 次**齐次元素**，也称 $\mathfrak{a}$ 为 M 阶化代数.

例 4.5.1 设 V 为域 F 上 n 维线性空间，则 V 上的张量代数 $T(V)$ 是关于整数加法群 $\boldsymbol{Z}$ 的阶化结合代数.

事实上，对于 $m \in \boldsymbol{Z}_+$，取 $T(V)_m = T^m V$，对于 $m \in -\boldsymbol{N}$，取 $T(V)_m = \{0\}$ 即可.

例 4.5.2 域 F 上的 n 元多项式代数 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 阶化结合代数. 因而 F 上 n 维线性空间 V 的对称代数 $S(V)$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 阶化结合代数.

由于 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 与 $S(V)$ 同构，故可将其等同起来. 设 $m \in \boldsymbol{Z}_+$，令 $S(V)_m$ 为 m 次齐次多项式生成的子空间；$m \in -\boldsymbol{N}$，令 $S(V)_m = \{0\}$. 于是 $S(V)$ 为 $\boldsymbol{Z}$ 阶化结合代数.

例 4.5.3 设 $\mathfrak{g}$ 为复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的半单李代数，$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，Δ,Π 分别为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系，素根系. 令

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{g}_k = \sum_{\mathrm{ht}\alpha = k}^{\cdot} \mathfrak{g}_\alpha, \quad k = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

于是

$$\mathfrak{g} = \sum_{k\in \boldsymbol{Z}}^{\cdot} \mathfrak{g}_k, \quad [\mathfrak{g}_{k_1}, \mathfrak{g}_{k_2}] \subseteq \mathfrak{g}_{k_1+k_2}, \quad \forall\, k_1, k_2 \in \boldsymbol{Z}.$$

因而 $\mathfrak{g}$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 阶化李代数.

定义 4.5.3 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的代数（结合代数或者李代数），在 $\mathfrak{a}$ 中有线性子空间序列

$$\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_m \subseteq \cdots \tag{11}$$

满足

$$\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{a}_{i+j}, \tag{12}$$

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}, \tag{13}$$

则称 $\mathfrak{a}$ 是一个**滤过代数**.

例 4.5.4 在 $T(V)$ 中令

$$T(V)_m = T^0V \dotplus \cdots \dotplus T^mV,$$

则 $T(V)$ 是滤过代数.

例 4.5.5 在 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 中令

$$F[x_1, x_2, \cdots, x_n]_m = \{f \in F[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mid \deg f \leqslant m\}$$

（规定 $\deg 0 = -\infty$），则 $F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 是滤过代数. 同样，$S(V)$ 也是滤过代数.

例 4.5.6 设 Δ,Π 分别为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，素根系. 令

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{g}_k = \sum_{|\mathrm{ht}\alpha| \leqslant k}^{\cdot} \mathfrak{g}_\alpha, \quad k = 1, 2, \cdots$$

（规定 $\mathrm{ht}0 = 0, 0 \in \mathfrak{h}^*$）. 于是

$$\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \cdots,$$

而且

$$[\mathfrak{g}_{k_1},\mathfrak{g}_{k_2}]\subseteq \mathfrak{g}_{k_1+k_2}.$$

因而 $\mathfrak{g}$ 是滤过李代数.

例 4.5.7 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的含单位元素 1 的结合代数，又 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个线性子空间，且生成 $\mathfrak{a}$，令

$$\mathfrak{a}_i = F\cdot 1 + \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^2 + \cdots + \mathfrak{m}^i,$$

这里 $\mathfrak{m}^i$ 表示由 $\mathfrak{m}$ 中 i 个元素乘积所张成的线性子空间，则 $\mathfrak{a}$ 是滤过代数.

定理 4.5.3 设 $\mathfrak{a}=\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathfrak{a}_i$ 是一个滤过代数，其中 $\mathfrak{a}_i(i=0,1,\cdots)$ 满足条件(11) 与(12)，则在线性空间

$$G(\mathfrak{a}) = \sum_{i\geq 0}{}^{\bullet}\ \mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i-1}$$

(记 $\mathfrak{a}_{-1}=\{0\}$.) 中可定义乘法满足

$$(a_i+\mathfrak{a}_{i-1})(a_j+\mathfrak{a}_{j-1}) = a_ia_j+\mathfrak{a}_{i+j-1},$$
$$\forall\, a_i\in\mathfrak{a}_i, a_j\in\mathfrak{a}_j \tag{14}$$

使得 $G(\mathfrak{a})$ 为 $\boldsymbol{Z}$ 阶化代数，称为**结合于 $\mathfrak{a}$ 的阶化代数**.

证 我们只要证明满足条件(14) 的定义是合理的，而其余条件都是显然的. 设 $a_i,b_i\in\mathfrak{a}_i; a_j,b_j\in\mathfrak{a}_j$ 且 $a_i-b_i\in\mathfrak{a}_{i-1}, a_j-b_j\in\mathfrak{a}_{j-1}$. 于是

$$a_ia_j-b_ib_j = a_i(a_j-b_j)+(a_i-b_i)b_j$$
$$\in \mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_{j-1}+\mathfrak{a}_{i-1}\mathfrak{a}_j\subseteq\mathfrak{a}_{i+j-1}.$$

因而 $G(\mathfrak{a})$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 阶化代数. ▌

习　题

1. 设 V 是域 F 上有限维线性空间，$T(V)$ 是 V 的张量代数，I 是 $T(V)$ 中由 $\{x\otimes y-y\otimes x\mid x,y\in V\}$ 生成的理想. 证明 I 也是 $\boldsymbol{Z}$- 阶化代数，且

$$I=\sum_{m\geq 2}I_m,\quad I_m = I\cap T^mV.$$

2. I_m 如习题 1 所述，证明 I_m 由下列形式的元素

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m - x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)}, \quad \sigma \in S_m$$

线性生成.

3. 设 $\operatorname{ch}F = 0$. 对 $\sigma \in S_m$,定义 T^mV 的线性变换 σ 满足:

$$\sigma(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_m) = x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)}.$$

若 $a \in T^mV$,满足 $\sigma(a) = a$, $\forall \sigma \in S_m$,则称 a 是 m 阶的**对称张量**. 试证

1) 所有 m 阶对称张量构成 T^mV 的一个线性子空间 $\widetilde{S}^m(V)$;又若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 V 的一组基,则

$$\frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in S_m} x_{i_{\sigma(1)}} \otimes x_{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes x_{i_{\sigma(m)}},$$
$$1 \leqslant i_{\sigma(1)} \leqslant i_{\sigma(2)} \leqslant \cdots \leqslant i_{\sigma(m)} \leqslant n$$

是 $\widetilde{S}^m(V)$ 的一组基;

2) $T^mV = I_m \dotplus \widetilde{S}^m(V)$;

3) 设 π 为 $T(V)$ 到 $S(V)$ 的自然同态,则 π 是 $\widetilde{S}(V) = \sum_m{}^{\boldsymbol{\cdot}} \widetilde{S}^m(V)$ 到 $S(V)$ 的线性空间的同构.

4. 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的 $\mathbf{Z}$ 阶化代数,且

$$\mathfrak{a} = \sum_{m \in \mathbf{Z}}{}^{\boldsymbol{\cdot}} \mathfrak{a}_m, \quad \mathfrak{a}_m\mathfrak{a}_n \subseteq \mathfrak{a}_{m+n}.$$

令

$$\mathfrak{a}^m = \sum_{|k| \leqslant m} \mathfrak{a}_k, \quad m \geqslant 0,$$

则 $\mathfrak{a}$ 对子空间序列 $\mathfrak{a}^0 \subseteq \mathfrak{a}^1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}^m \subseteq \cdots$ 是滤过代数.

5. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单李代数,$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$是一个素根系.

令

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i \,\middle|\, m_i \in \mathbf{Z} \right\}.$$

试证

1) Q 是交换群,$\mathfrak{g}$ 是 Q 阶化李代数.

2) 设 $s = (s_1, s_2, \cdots, s_l) \in \mathbf{Z}^n$,令

$$\mathfrak{g}_j(s) = \sum_{\alpha}{}^{\bullet} \mathfrak{g}_\alpha$$

(这里是对满足下列条件的 α 求和：设 $\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$，则 $\sum_{i=1}^{l} k_i s_i = j$)，则 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbf{Z}$ 阶化李代数.

3) 令 $s = (1,1,\cdots,1)$，则 $\mathfrak{g}$ 是例 4.5.3 中的 $\mathbf{Z}$ 阶化李代数.

注 1 我们称 Q 为 $\mathfrak{g}$ 的**根格**.

注 2 2) 中的阶化李代数称为 s- 型 $\mathbf{Z}$ 阶化李代数.

注 3 3) 中的阶化李代数，即 $(1,1,\cdots,1)$- 型 $\mathbf{Z}$ 阶化李代数，称为**主阶化李代数**.

6. 设 $\mathfrak{m}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个线性子空间，且生成 $\mathfrak{g}$. 令

$$\mathfrak{g}_k = \mathfrak{m} + [\mathfrak{m},\mathfrak{m}] + \cdots + \underbrace{[\mathfrak{m},\cdots,[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\cdots]}_{k个}.$$

试问 $\mathfrak{g}$ 对于子空间序列 $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{g}_k \subseteq \cdots$ 是否为滤过李代数？

7. 本节的定理 4.5.3 对于李代数是否成立，为什么？

§6 通用包络代数

本节将给出李代数的通用包络代数的定义并证明其存在性及唯一性；并给出通用包络代数的一组基. 这样定理 1.1.1 后的问题得以解决.

定义 4.6.1 设 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上的李代数，$\mathfrak{a}$ 为 F 上的含单位元素 1 的结合代数. 若有 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{a}$ 的线性映射 φ 满足

1) $\varphi([x,y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$，$\forall\, x,y \in \mathfrak{g}$； (1)

2) $\{1,\varphi(x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$ 生成 $\mathfrak{a}$，

则称 $(\varphi,\mathfrak{a})$ 或 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**包络代数**.

例 4.6.1 设 $F^{n\times n}$ 是域 F 上 n 阶方阵集所构成的结合代数，$so(n,F)$ 是 F 上 n 阶正交李代数 ($A \in so(n,F)$ 当且仅当 $A' = -A$).

当 $n \geqslant 3$ 时，$F^{n\times n}$ 是 $so(n,F)$ 的包络代数. 而

$\left\{\left.\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right| a,b \in F\right\}$是 $so(2,F)$ 的包络代数.

事实上,假设$so(n,F)$到$F^{n\times n}$的映射φ为: $\varphi(A)=A$, $\forall\, A\in so(n,F)$. 显然,φ满足条件(1).

$n\geqslant 3$,对于$i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant n$. 存在$k\neq i, k\neq j, 1\leqslant k\leqslant n$. 由$(E_{ik}-E_{ki})(E_{kj}-E_{jk})=E_{ij}, E_{ij}E_{ji}=E_{ii}$,知$\{I_n, E_{ij}-E_{ji}\}$生成结合代数$F^{n\times n}$,故$F^{n\times n}$是$so(n,F)$的包络代数.

由于

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix},$$

$$\forall\, a,b,c,d\in F,$$

因而知$\left\{\left.\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right| a,b \in F\right\}$是 $so(2,F)$ 的包络代数. ▌

定义 4.6.2 设$\mathfrak{g}$是域F上的李代数,$U(\mathfrak{g})$是F上含单位元素1的结合代数,且满足:

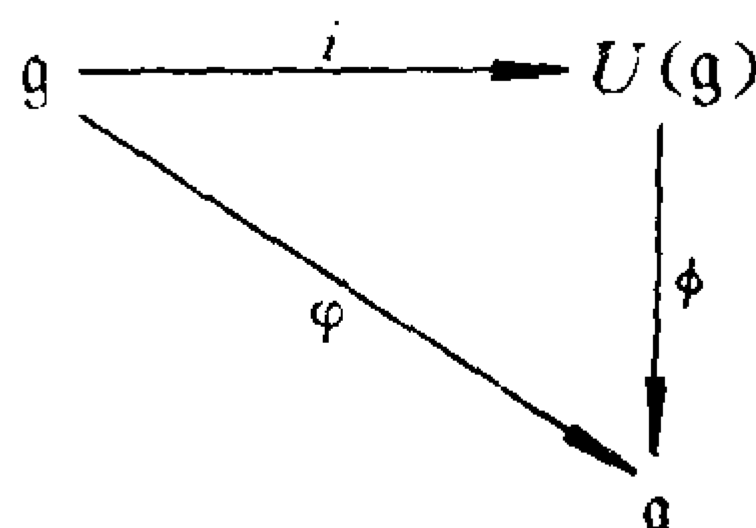
1) 存在$\mathfrak{g}$到$U(\mathfrak{g})$的线性映射i,满足条件(1),即

$$i([x,y])=i(x)i(y)-i(y)i(x),\quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g};$$

2) 若有$\mathfrak{g}$到F上含单位元素的结合代数$\mathfrak{a}$的线性映射φ也满足条件(1),则存在唯一的$U(\mathfrak{g})$到$\mathfrak{a}$的同态映射ϕ,使得

$$\varphi=\phi\circ i, \tag{2}$$

即右面的映射图为交换图,则称$U(\mathfrak{g})$是$\mathfrak{g}$的**通用包络代数**.



定理 4.6.1 设$\mathfrak{g}$是域F上有限维李代数,则在同构意义下存在唯一的$\mathfrak{g}$的通用包络代数$U(\mathfrak{g})$.

证 记T为线性空间$\mathfrak{g}$的张量代数. 又记J为T中由$\{x\otimes y-y\otimes x-[x,y]\,|\,x,y\in\mathfrak{g}\}$生成的理想. 令

$$U(\mathfrak{g})=T/J, \tag{3}$$

以 π 表示 T 到 $U(\mathfrak{g})$ 的自然同态.

由于 $J\subseteq \sum\limits_{m>0}^{\bullet} T^m\mathfrak{g}$,故 $\pi(T^0\mathfrak{g})=\pi(F)$. 于是 $\pi|_F$ 是 F 到 $U(\mathfrak{g})$ 中的一一映射,故 $U(\mathfrak{g})$ 是含单位元素 1 的结合代数. 令

$$i=\pi|_{T^1\mathfrak{g}}=\pi|_{\mathfrak{g}}, \tag{4}$$

由(3)式知

$$\begin{aligned} i(x)i(y) &- i(y)i(x) - i([x,y]) \\ &= \pi(x)\pi(y)-\pi(y)\pi(x)-\pi([x,y]) \\ &= \pi(x\otimes y - y\otimes x - [x,y]) \\ &= 0, \quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}, \end{aligned}$$

故 i 是 $\mathfrak{g}$ 到 $U(\mathfrak{g})$ 的满足条件(1)的线性映射.

设 $\mathfrak{a}$ 是 F 上含单位元素 1 的结合代数,又 φ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{a}$ 的线性映射,并满足条件(1). 于是我们由定理4.5.2知,有 T 到 $\mathfrak{a}$ 的同态 ϕ',使得

$$\varphi(x)=\phi'(x),\quad \forall\, x\in\mathfrak{g}.$$

将 φ 扩充为 $T^0\mathfrak{g}+T^1\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{a}$ 的线性映射,使 $\varphi(1)=1$. 由(1)式知

$$\begin{aligned} \phi'(x\otimes y &- y\otimes x-[x,y]) \\ &= \phi'(x)\phi'(y)-\phi'(y)\phi'(x)-\phi'([x,y]) \\ &= \varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x)-\varphi([x,y]) \\ &= 0, \quad \forall\, x,y\in\mathfrak{g}, \end{aligned}$$

故知 $J\subseteq \mathrm{Ker}\phi'$. 因而 $T/\mathrm{Ker}\phi'$ 与 $(T/J)/(\mathrm{Ker}\phi'/J)$ 同构, 即有 ϕ 使得

$$\phi'=\phi\circ\pi,$$

且 ϕ 在 $\mathfrak{g}$ 上的限制使(2)式成立.

由于 $U(\mathfrak{g})$ 由 $1, i(\mathfrak{g})$ 生成,故满足(2)式的 ϕ 是唯一的.

设 $V(\mathfrak{g})$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数,$\mathfrak{g}$ 到 $V(\mathfrak{g})$ 中满足(1)的映射为 j. 于是有 $U(\mathfrak{g})$ 到 $V(\mathfrak{g})$ 的同态 ϕ,使得

$$j=\phi\circ i.$$

同样有 $V(\mathfrak{g})$ 到 $U(\mathfrak{g})$ 的同态 ψ,使得

$$\imath = \psi \circ j = \psi \circ \phi \circ i = \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})} \circ i.$$

于是，$\mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}, \psi \circ \phi$ 均为 $U(\mathfrak{g})$ 到 $U(\mathfrak{g})$ 的同态，且满足条件(2). 故由满足此条件的同态的唯一性知

$$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}.$$

同样

$$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{V(\mathfrak{g})}.$$

故 $U(\mathfrak{g})$ 与 $V(\mathfrak{g})$ 同构. ▌

推论 1 设 $U(\mathfrak{g})$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数，i 为 $\mathfrak{g}$ 到 $U(\mathfrak{g})$ 的映射，且满足(1)，则 $i(\mathfrak{g})$ 与 $\mathfrak{g}$ 是同构的线性空间；$1, i(\mathfrak{g})$ 生成 $U(\mathfrak{g})$；$1 \overline{\in} i(\mathfrak{g})$；$U(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的包络代数.

这些结论已在定理 4.6.1 的证明中得到. ▌

推论 2 设 $U(\mathfrak{g})$ 及 $\mathfrak{a}$ 分别为李代数 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数及包络代数，则 $\mathfrak{a}$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 的同态像.

证 设 φ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{a}$ 的满足(1)式的线性映射. i 是 $\mathfrak{g}$ 到 $U(\mathfrak{g})$ 的满足(1)式的线性映射. 由推论 1 可将 $i(\mathfrak{g})$ 与 $\mathfrak{g}$ 等同，即 $\mathfrak{g} \subseteq U(\mathfrak{g})$. 又设 ϕ 是 $U(\mathfrak{g})$ 到 $\mathfrak{a}$ 的满足(2)式的同态，于是有

$$\phi(x) = \varphi(x), \quad \forall\, x \in \mathfrak{g},$$

$$\phi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

由 $1, \mathfrak{g}$ 生成 $U(\mathfrak{g})$；$1, \varphi(\mathfrak{g})$ 生成 $\mathfrak{a}$. 于是有 $U(\mathfrak{g})$ 到 $\mathfrak{a}$ 的同态 ϕ_1 使得 $\phi_1(x) = \phi(x) = \varphi(x)$, $\forall\, x \in \mathfrak{g}$，而 $\phi_1(1) = 1$. 由于 ϕ, ϕ_1 均满足(2)式，故 $\phi = \phi_1$. 换言之，$\phi(1) = 1$. 故 $\phi(U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{a}$，即 $\mathfrak{a}$ 为 $U(\mathfrak{g})$ 的同态像. ▌

例 4.6.2 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上有限维交换李代数，则 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数 $U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$，即为 $\mathfrak{g}$ 上对称代数.

这是因为 $[x, y] = 0$, $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$. ▌

对于一般的有限维李代数 $\mathfrak{g}$，在第四章 §5 中我们已经知道了 $\mathfrak{g}$ 上对称代数 $S(\mathfrak{g})$ 的基. 下面我们来讨论 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的基. 我们假定 T 为 $\mathfrak{g}$ 的张量代数；I, J 分别为 T 中由 $\{x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$，$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$ 生成的理

想. 于是 $S = T/I, U = T/J$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的对称代数,通用包络代数. 又以 σ,π 表示 T 到 S,U 的自然同态. i 为 $\mathfrak{g}$ 到 U 中的线性映射,且满足

$$\pi(x) = i(x), \quad \forall\, x \in \mathfrak{g}.$$

于是有

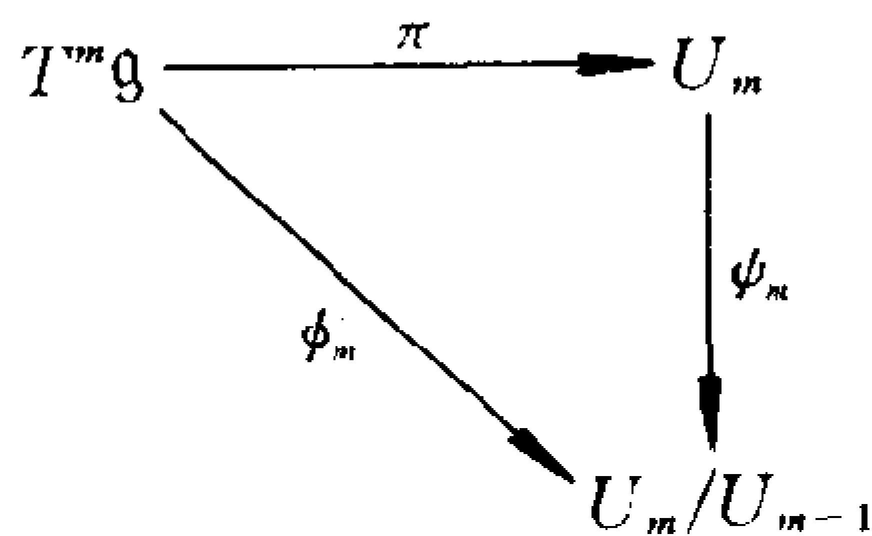
$$\pi(T^m\mathfrak{g}) = i(\mathfrak{g})^m.$$

又 $i(\mathfrak{g})$ 与 1 生成 U. 由例 4.5.7 知,对 U 中子空间序列

$$U_0 = F \cdot 1 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_m \subseteq \cdots$$

(这里 $U_m = U_{m-1} + i(\mathfrak{g})^m$), U 是滤过代数. 于是由定理 4.5.3 知有结合于 U 的阶化代数 $G(U) = G$.

令 ψ_m 为 U_m 到 U_m/U_{m-1} 的自然映射. 又因 $\pi(T^m\mathfrak{g}) \subseteq U_m$,于是有 $T^m\mathfrak{g}$ 到 U_m/U_{m-1} 的映射 ϕ_m 使右面的映射图为交换图,即



$$\phi_m = \psi_m \circ \pi. \tag{5}$$

由于 U_m/U_{m-1} 与 $i(\mathfrak{g})^m/i(\mathfrak{g})^m \cap U_{m-1}$ 同构,因而 ϕ_m 是 $T^m\mathfrak{g}$ 到 U_m/U_{m-1} 的满映射. 令

$$\phi = \phi_0 \dotplus \phi_1 \dotplus \cdots \dotplus \phi_m \dotplus \cdots, \tag{6}$$

则 ϕ 是 T 到 G 的满线性映射.

引理 4.6.2 沿用上面的假设与符号,则 ϕ 是 T 到 G 的结合代数的同态,且

$$\phi(I) = 0.$$

又 ϕ 诱导出 S 到 G 的一个满同态 ω,满足

$$\omega\sigma(a) = \phi(a), \quad \forall\, a \in T. \tag{7}$$

证 设 $a \in T^m\mathfrak{g}, b \in T^p\mathfrak{g}$,于是由(5)与(6)知

$$\phi(a) = \psi_m\pi(a), \quad \phi(b) = \psi_p\pi(b).$$

再由定理 4.5.4 知

$$\phi(a)\phi(b) = \pi(ab) + U_{m+p-1} = \phi(ab),$$

故 ϕ 是结合代数的同态. 又 $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$,有

$$\begin{aligned}&\phi(x\otimes y-y\otimes x-[x,y])\\&\quad=\psi_2\pi(x\otimes y-y\otimes x)-\psi_1\pi([x,y])\\&\quad=\psi_2\pi([x,y])-\psi_1\pi([x,y])=0,\end{aligned}$$

因而$\phi(I)=0$,故ϕ诱导出S到G的一个满足(7)的满同态ω. ▌

下面我们将证明ω是同构映射.

从定理4.5.2知S与n元多项式代数$F[z_1,z_2,\cdots,z_n]$是同构的.若$v_1,v_2,\cdots,v_n$是$\mathfrak{g}$的一组基,则可将$v_{i_1}^{n_1}v_{i_2}^{n_2}\cdots v_{i_k}^{n_k}$与$z_{i_1}^{n_1}z_{i_2}^{n_2}\cdots z_{i_k}^{n_k}$等同起来.记

$$S^m=\{x\in S\mid \deg x=m\}\cup\{0\},$$

$$S_m=S^0\dotplus S^1\dotplus\cdots\dotplus S^m=\{x\in S\mid \deg x\leqslant m\}.$$

对$m\in N$,若有$\lambda_i(i=1,2,\cdots,m)$,$\lambda$满足:

$$1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m\leqslant n,$$

若令$I=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$,则记$\lambda\leqslant I$,并记

$$z_I=z_{\lambda_1}z_{\lambda_2}\cdots z_{\lambda_m}.$$

引理4.6.3 沿用上面的符号,对每个非负整数m,存在唯一的$\mathfrak{g}\otimes S_m$到S的线性映射f_m满足下列条件:

(A_m) $f_m(v_\lambda\otimes z_I)=z_\lambda z_I,\ \forall\lambda\leqslant I,z_I\in S_m;$

(B_m) $f_m(v_\lambda\otimes z_I)\in S_{k+1},\ \forall z_I\in S_k,k<m;$

(C_m) $f_m(v_\lambda\otimes f_m(v_\mu\otimes z_J))=f_m(v_\mu\otimes f_m(v_\lambda\otimes z_J))$
$\qquad+f_m([v_\lambda,v_\mu]\otimes z_J),\ \forall z_J\in S_{m-1};$

(D_m) $f_m(v_\lambda\otimes z_I)-z_\lambda z_I\in S_k,\ \forall z_I\in S_k,k\leqslant m.$

又,f_m在$\mathfrak{g}\otimes S_{m-1}$上的限制与$f_{m-1}$一致.

证 显然,如果(D_m)成立,则(B_m)成立.这时(C_m)中各项是有定义的.下面用递推的办法来构造f_m.

$m=0$,仅有$z_I=1$.可令f_0为$\mathfrak{g}\otimes S_0$到S的线性映射,且$f_0(v_\lambda\otimes 1)=z_\lambda$.显然$(\mathrm{A}_0)$—$(\mathrm{D}_0)$均成立.由条件$(\mathrm{A}_0)$,$f_0$是唯一的.

设f_{m-1}我们已经定义.现将f_{m-1}开拓为f_m.因为$z_{\lambda_1}z_{\lambda_2}\cdots z_{\lambda_m}$

$(1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m \leqslant n)$ 为 S^m 的基，$S_m = S_{m-1} \dotplus S^m$，故我们只要给出 f_m 在 $v_\lambda \otimes z_I$ 上的作用就可以了，这里 $I = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$.

若 $\lambda \leqslant I$，按照(A_m)，只能有

$$f_m(v_\lambda \otimes z_I) = z_\lambda z_I.$$

若 $\lambda \leqslant I$ 不成立，于是 $\lambda_1 < \lambda$. 令 $J = \{\lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$，则 $\lambda_1 \leqslant J$，$z_J \in S_{m-1}$，且有

$$f_m(v_{\lambda_1} \otimes z_J) = f_{m-1}(v_{\lambda_1} \otimes z_J) = z_{\lambda_1} z_J = z_I.$$

于是按照(C_m) 有：

$$\begin{aligned} f_m(v_\lambda \otimes z_I) &= f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_{\lambda_1} \otimes z_J)) \\ &= f_m(v_{\lambda_1} \otimes f_{m-1}(v_\lambda \otimes z_J)) + f_{m-1}([v_\lambda, v_{\lambda_1}] \otimes z_J). \end{aligned}$$

由(D_{m-1})知，

$$y = z_\lambda z_J - f_{m-1}(v_\lambda \otimes z_J) \in S_{m-1}.$$

又 $z_\lambda z_J = z_{I_1}$，则 $\lambda_1 \leqslant I_1$. 由此能唯一地给出 f_m 在 $v_\lambda \otimes z_I$ 上的作用为

$$f_m(v_\lambda \otimes z_I) = z_{\lambda_1} z_{I_1} - f_{m-1}(v_{\lambda_1} \otimes y) + f_{m-1}([v_\lambda, v_{\lambda_1}] \otimes z_J).$$

从 f_m 的定义过程知 f_m 是唯一的；限制在 $\mathfrak{g} \otimes S_{m-1}$ 上与 f_{m-1} 一致；满足(A_m)与(D_m)，因而也满足(B_m).

余下证明 f_m 满足(C_m).

$\mu = \lambda$ 时，(C_m)自然成立.

$\lambda \neq \mu$，但 $\lambda \leqslant J$ 或 $\mu \leqslant J$. 由 f_m 的定义及$[v_\lambda, v_\mu] = -[v_\mu, v_\lambda]$，知$(C_m)$成立.

最后，设 $\lambda \neq \mu$；$\lambda \leqslant J, \mu \leqslant J$ 均不成立，其中 $J = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{m-1})$. 令 $L = (\mu_2, \cdots, \mu_{m-1})$，于是有 $\mu_1 < \lambda, \mu_1 < \mu$. 由递推的定义有

$$\begin{aligned} f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_\mu \otimes z_J)) &= f_m(v_\lambda \otimes f_{m-1}(v_\mu \otimes f_{m-1}(v_{\mu_1} \otimes z_L)) \\ &= f_m(v_\lambda \otimes f_{m-1}(v_{\mu_1} \otimes f_{m-1}(v_\mu \otimes z_L))) \\ &\quad + f_m(v_\lambda \otimes f_{m-1}([v_\mu, v_{\mu_1}] \otimes z_L)). \end{aligned}$$

由于 $\mu_1 < \lambda$，对右边的第一项可以用(C_m)．又 $z_L \in S_{m-2}$，$f_{m-1}([v_\mu, v_{\mu_1}] \otimes z_L) \in S_{m-1}$，故对右边的第二项可以用($C_{m-1}$)．因而有

$$
\begin{aligned}
& f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_\mu \otimes z_J)) \\
&\quad = f_m(v_{\mu_1} \otimes f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_\mu \otimes z_L))) \\
&\qquad + f_m([v_\lambda, v_{\mu_1}] \otimes f_m(v_\mu \otimes z_L)) + f_m([v_\lambda, [v_\mu, v_{\mu_1}]] \otimes z_L) \\
&\qquad + f_m([v_\mu, v_{\mu_1}] \otimes f_m(v_\lambda \otimes z_L)).
\end{aligned}
$$

变换 λ, μ 的位置，可得

$$
\begin{aligned}
& f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_\mu \otimes z_J)) - f_m(v_\mu \otimes f_m(v_\lambda \otimes z_J)) \\
& = f_m(v_{\mu_1} \otimes (f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_\mu \otimes z_L)) - f_m(v_\mu \otimes f_m(v_\lambda \otimes z_L)))) \\
&\quad + f_m(([v_\lambda, [v_\mu, v_{\mu_1}]] - [v_\mu, [v_\lambda, v_{\mu_1}]]) \otimes z_L).
\end{aligned}
$$

注意到 $f_m(v_\mu \otimes z_L), f_m(v_\lambda \otimes z_L) \in S_{m-1}$，故有

$$
\begin{aligned}
& f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_\mu \otimes z_L)) - f_m(v_\mu \otimes f_m(v_\lambda \otimes z_L)) \\
&\qquad = f_m([v_\lambda, v_\mu] \otimes z_L), \\
& [v_\lambda, [v_\mu, v_{\mu_1}]] - [v_\mu, [v_\lambda, v_{\mu_1}]] = [[v_\lambda, v_\mu], v_{\mu_1}].
\end{aligned}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
& f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_\mu \otimes z_J)) - f_m(v_\mu \otimes f_m(v_\lambda \otimes z_J)) \\
&\qquad = f_m(v_{\mu_1} \otimes f_m([v_\lambda, v_\mu] \otimes z_L)) + f_m([[v_\lambda, v_\mu], v_{\mu_1}] \otimes z_L).
\end{aligned}
$$

由于 $f_m([v_\lambda, v_\mu] \otimes z_L) \in S_{m-1}$，故由($C_{m-1}$)有

$$
\begin{aligned}
& f_m(v_{\mu_1} \otimes f_m([v_\lambda, v_\mu] \otimes z_L)) \\
&\quad = f_m([v_\lambda, v_\mu] \otimes f_m(v_{\mu_1} \otimes z_L)) + f_m([v_{\mu_1}, [v_\lambda, v_\mu]] \otimes z_L) \\
&\quad = f_m([v_\lambda, v_\mu] \otimes z_J) - f_m([[v_\lambda, v_\mu], v_{\mu_1}] \otimes z_L).
\end{aligned}
$$

因而

$$
\begin{aligned}
& f_m(v_\lambda \otimes f_m(v_\mu \otimes z_J)) \\
&\qquad = f_m(v_\mu \otimes f_m(v_\lambda \otimes z_J)) + f_m([v_\lambda, v_\mu] \otimes z_J),
\end{aligned}
$$

即(C_m)成立．故引理 4.6.3 成立． ▌

推论 在上述假定下，存在 $\mathfrak{g}$ 的以 S 为表示空间的表示(ρ, S)满足：

$$\rho(v_\lambda)z_I = z_\lambda z_I, \quad \lambda \leqslant I;$$

$$\rho(v_\lambda)z_I - z_\lambda z_I \in S_m, \quad z_I \in S^m.$$

证 从引理 4.6.3 知,可定义 $\mathfrak{g} \otimes S$ 到 S 的线性映射 f,满足 f 在 $\mathfrak{g} \otimes S_m$ 上的限制为 f_m. 由

$$\rho(v)x = f(v \otimes x), \quad v \in \mathfrak{g}, x \in S$$

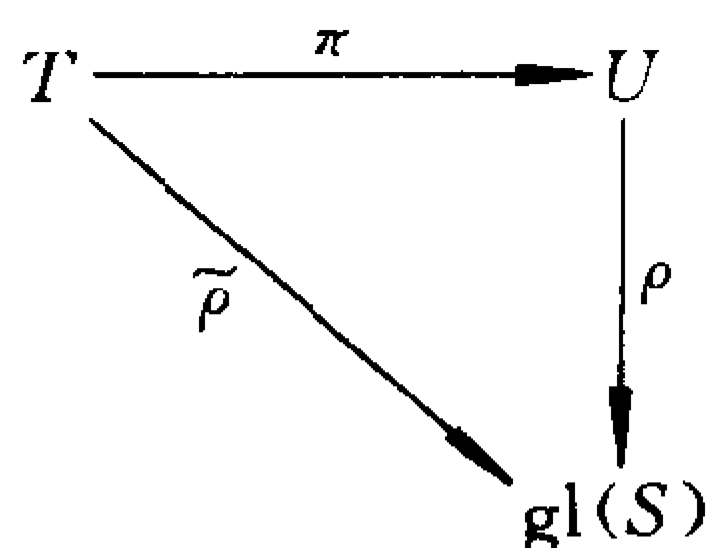
可定义 S 的线性变换 $\rho(v)$,因而 ρ 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{gl}(S)$ 的映射. 由 f 的线性性,知 ρ 是线性映射. 由 (C_m) 知 $\rho(v_1)\rho(v_2) - \rho(v_2)\rho(v_1) = \rho([v_1, v_2])$. 于是 (ρ, S) 是 $\mathfrak{g}$ 的表示,且满足所要求的条件. ▍

定理 4.6.4 设 S, G 与 ω 如引理 4.6.2 所述,则 ω 是 S 到 G 的同构映射.

证 在引理 4.6.2 中,已经证明 ω 是 S 到 G 的满同态. 又 I, J 分别为 $\mathfrak{g}$ 的张量代数 T 中由 $\{x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$, $\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}$ 生成的理想. $S = T/I$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对称代数. $U = T/J$ 是 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数. 设 σ, π 分别为 T 到 S, U 的自然同态.

设 $t \in J, t = \sum_{m \in Z} t_m, t_m \in T^m$. 现证明 $t_m \in I$.

事实上,可将引理 4.6.3 的推论中所得 $\mathfrak{g}$ 的表示 $(\rho, \mathrm{gl}(S))$ 开拓为 U 的表示,再开拓为 T 的表示 $(\tilde{\rho}, \mathrm{gl}(S))$,其中 $\tilde{\rho}$ 满足



$$\tilde{\rho} = \rho \circ \pi,$$

即有右图所示的交换图表. 显然,$J \subseteq \mathrm{Ker}\tilde{\rho}$,于是 $\tilde{\rho}(1) = 0$. 但是 $\tilde{\rho}(t) \cdot 1$ 是多项式,其最高项应为 z_I 的线性组合. 由引理 4.6.3 的推论知,这个组合在 S 中为零,于是 $t_m \in I$.

现设 $t \in T^m\mathfrak{g}, \pi(t) \in U_{m-1}$,于是(6)式中的 ϕ 满足 $\phi(t) = 0$,即有 $t' \in T_{m-1}$,使得 $\pi(t) = \pi(t')$. 因而 $t - t' \in J$,即有 $t - t' \in T_m \bigcap J$. 而 $t - t'$ 的 m 次齐次分量为 t,故由上面的事实知 $t \in I$.

这就说明,若 $t \in T^m\mathfrak{g}$,$t \in \mathrm{Ker}\phi$,则 $t \in I$. 于是有

$$\mathrm{Ker}\phi \subseteq I.$$

在引理 4.6.2 中已经证明 $I \subseteq \mathrm{Ker}\phi$,故 ω 是同构. ▌

从这个定理,我们立即可以得到李代数 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的基.

定理 4.6.5(Poincaré-Birkhoff-Witt) 设域 F 上李代数 $\mathfrak{g}$ 有基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$,又 π 是 $\mathfrak{g}$ 上张量代数 $T(\mathfrak{g})$ 到 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的自然映射,则 $U(\mathfrak{g})$ 有如下形式的基:

$$\{1,\pi(v_{i_1})\cdots\pi(v_{i_m}),\cdots \mid 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n, m = 1,2,\cdots\}.$$

证 设 σ 为 $T(\mathfrak{g})$ 到 $\mathfrak{g}$ 上对称代数 $S(\mathfrak{g})$ 上的自然映射. 由前面的讨论知,有下面映射交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} & & U_m & & \\ & \overset{\pi}{\nearrow} & & \overset{\psi_m}{\searrow} & \\ T^m\mathfrak{g} & & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & & G^m = U_m/U_{m-1} \\ & \underset{\sigma}{\searrow} & & \underset{\omega}{\nearrow} & \\ & & S^m & & \end{array}$$

由于 $\sigma(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_m})$,$1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n(m = 0,1,2,\cdots)$ 是 S^m 的一组基,故

$$\phi(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_m})\ (1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_m)$$

是 G^m 的一组基. 于是 $\pi(v_{i_1})\pi(v_{i_2})\cdots\pi(v_{i_m})(1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n)$ 在 U_m 中线性无关,且生成的子空间是 U_{m-1} 在 U_m 中的补子空间. 由 $U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{m=0}^{\infty} U_m$ 是滤过代数,故 $\{1,\pi(v_{i_1})\cdots\pi(v_{i_m}) \mid 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n, m = 1,2,\cdots\}$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 的一组基. ▌

推论 $\mathfrak{g}$ 到 $U(\mathfrak{g})$ 中线性映射 i 是一一的.

证 这是因为 $i(v_j) = \pi(v_j)$,而 $\pi(v_1),\pi(v_2),\cdots,\pi(v_n)$ 是线性无关的,故 i 是一一的. ▌

通常将上面 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理简称 **PBW 定理**. 由

此定理及其推论，i 将 $\mathfrak{g}$ 嵌入到 $U(\mathfrak{g})$ 中. 因而，以后可以认为 $\mathfrak{g}$ 是 $U(\mathfrak{g})$ 的子空间，且 $U(\mathfrak{g})$ 由 $\mathfrak{g}$ 与 1 生成. 若 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基，则 $U(\mathfrak{g})$ 有基

$$1, \ v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_m}, \quad 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n, \ m = 1, 2, \cdots.$$

习　题

1. 设 U 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的包络代数，又设 i 是 $\mathfrak{g}$ 到 U 的相应的映射. 若对 $\mathfrak{g}$ 的任何包络代数 $\mathfrak{a}$，相应的 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{a}$ 的映射为 j，都存在 U 到 $\mathfrak{a}$ 的代数同态 ϕ，使得

$$j = \phi \circ i.$$

试问 U 是否为 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数.

2. 设 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是域 F 上的两个李代数，φ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的满同态，$(i_k, U(\mathfrak{g}_k))$ 是 $\mathfrak{g}_k$ 的通用包络代数，i_k 为相应的 $\mathfrak{g}_k$ 到 $U(\mathfrak{g}_k)$ 的映射，则存在 $U(\mathfrak{g}_1)$ 到 $U(\mathfrak{g}_2)$ 的满同态 φ' 满足

$$i_2 \circ \varphi = \varphi' \circ i_1,$$

即下面的映射图是交换图表.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathfrak{g}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ U(\mathfrak{g}_1) & \xrightarrow{\ \varphi'\ } & U(\mathfrak{g}_2) \end{array}$$

3. 设 $\mathfrak{a}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想，$\mathscr{R}$ 为 $U(\mathfrak{g})$ 中由 $i(\mathfrak{a})$ 生成的理想，则有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 到 $U(\mathfrak{g})/\mathscr{R}$ 的线性映射 j 满足

$$j(x + \mathfrak{a}) = i(x) + \mathscr{R}, \quad \forall\, x \in \mathfrak{g},$$

且 $(j, U(\mathfrak{g})/\mathscr{R})$ 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 的通用包络代数.

4. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上有限维李代数. 证明 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 无零因子.

5. 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上有限维李代数，π 是 $\mathfrak{g}$ 的张量代数 T 到 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数 U 的自然同态，σ 是 T 到 $\mathfrak{g}$ 的对称代数 S 的自然同态. 若 W 是 $T^m\mathfrak{g}$ 的子空间且同构于 $S^m = \sigma(T^m\mathfrak{g})$. 试证：$\pi(w)$ 是 U_{m-1} 在 U_m 中的补子空间，其中

$$U_m = \pi\left(\sum_{k=0}^{m} T^k\mathfrak{g}\right).$$

6. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数，又 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 $\mathfrak{h}$ 的基；$(u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的基. 证明

1） 由一一映射

$$\mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$$

诱导的 $U(\mathfrak{h})$ 到 $U(\mathfrak{g})$ 的同态是一一的.

2） $U(\mathfrak{g})$ 是一个自由 $U(\mathfrak{h})$- 模，由

$$1,\ v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant m,\ k = 1, 2, \cdots$$

构成一组自由基.

7. 试证：李代数 $\mathfrak{g}$ 的内导子 $\mathrm{ad}x\,(x \in \mathfrak{g})$ 可以扩充为 $U(\mathfrak{g})$ 的导子.

注 更一般地有 $\mathfrak{g}$ 的任何导子 D 均可扩充为其通用包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的导子. 此结果的证明可参看 N. Jacobson：《Lie Algebras》的第五章 §1.

§7 自由李代数

本节将介绍自由李代数的定义及其存在唯一性. 自由李代数的重要性在于任何李代数都是某个自由李代数的商代数.

定义 4.7.1 设 X 是一个非空集合，称域 F 上的李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 为由 X 生成的**自由李代数**，如果 X 到李代数 $\mathfrak{m}$ 中任一映射 θ 都能唯一地开拓为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\mathfrak{m}$ 的同态.

类似地，我们可以定义自由结合代数的概念.

定理 4.7.1 由非空集合 X 生成的域 F 上的自由李代数存

在，而且在同构意义下是唯一的.

证 我们先证明存在性. 以 V 表示以 X 为基的域 F 上的线性空间，$T(V)$ 为 V 的张量代数. 因而 $T(V)$ 对于括积：

$$[x,y]=x\otimes y-y\otimes x,\quad \forall\, x,y\in T(V)$$

是一个李代数. 设 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 为李代数 $T(V)$ 的由 X 生成的子代数.

设 θ 为 X 到李代数 $\mathfrak{m}$ 中的映射. 于是 θ 可唯一地开拓为 V 到 $\mathfrak{m}$ 中的线性映射. 又设 $\mathfrak{m}$ 的通用包络代数为 $U(\mathfrak{m})$，它由 $\mathfrak{m}$ 与单位元素 1 生成，故 θ 可唯一地开拓为 $T(V)$ 到 $U(\mathfrak{m})$ 的结合代数的同态. 于是开拓后的 θ 也是李代数 $T(V)$ 到李代数 $U(\mathfrak{m})$ 的同态. 由 $\theta(V)\subseteq\mathfrak{m}$，$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subseteq\mathfrak{m}$，故 θ 已唯一地开拓为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\mathfrak{m}$ 的同态. 故 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 为由 X 生成的自由李代数.

下面证唯一性. 设 $\tilde{\mathfrak{g}}$，$\tilde{\mathfrak{g}}_1$ 均为 X 生成的域 F 上的自由李代数，于是 id_X 可以分别唯一地开拓为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的同态 $\mathrm{id}_{\tilde{\mathfrak{g}}}$，$\tilde{\mathfrak{g}}_1$ 到 $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ 的同态 $\mathrm{id}_{\tilde{\mathfrak{g}}_1}$，$\tilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ 的同态 ϕ，$\tilde{\mathfrak{g}}_1$ 到 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的同态 ψ. 于是有

$$\psi\circ\phi=\mathrm{id}_{\tilde{\mathfrak{g}}},\quad \phi\circ\psi=\mathrm{id}_{\tilde{\mathfrak{g}}_1}.$$

或者说有下面的交换图表：

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\ \phi\ } & \tilde{\mathfrak{g}}_1 \\
\Big\updownarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\tilde{\mathfrak{g}}}} & & \Big\updownarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\tilde{\mathfrak{g}}_1}} \\
\tilde{\mathfrak{g}} & \xleftarrow{\ \psi\ } & \tilde{\mathfrak{g}}_1
\end{array}$$

因而 $\phi=\psi^{-1}$ 为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ 的同构映射. ▎

注 在这个定理的证明中已经用到了 V 的张量代数：

$$T(V)=T^0V\dotplus T^1V\dotplus\cdots\dotplus T^kV\dotplus\cdots,$$

它是 X 生成的域 F 上的自由结合代数. 我们同样可以证明由 X 生成的自由结合代数在同构意义下是唯一的.

定义 4.7.2 设 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 是集合 X 生成的域 F 上的自由李代数，J 是一指标集，$\mathfrak{a}$ 是 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 中由 $\{f_j \mid j \in J\}$ 生成的理想，π 是 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 到商代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{a}$ 的自然同态. 称 $\pi(X)$ 为 $\widetilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{a}$ 的**生成元组**，并称

$$\pi f_j = 0, \quad j \in J$$

为 $\widetilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{a}$ 的**生成关系**.

例 4.7.1 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是域 F 上李代数 $\mathfrak{m}$ 的基，$C_{ij}^k(1 \leqslant i,j,k \leqslant n)$ 为对应的结构常数. 令 $X = \{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$，$\theta$：$X \to \mathfrak{m}$，定义为

$$\theta(x_i') = x_i, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

于是 θ 可开拓为由 X 生成的自由李代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\mathfrak{m}$ 的同态. 显然，这个同态 θ 是满同态，于是 $\mathfrak{m}$ 与 $\widetilde{\mathfrak{g}}/\mathrm{Ker}\theta$ 同构. 由 $[x_i, x_j] = \sum\limits_k C_{ij}^k x_k$，即

$$[\theta(x_i'), \theta(x_j')] = \sum_k C_{ij}^k \theta(x_k'),$$

因而

$$\theta\Big(x_i' \otimes x_j' - x_j' \otimes x_i' - \sum_k C_{ij}^k x_k'\Big) = 0.$$

于是 $\mathrm{Ker}\theta$ 为 $\Big\{x_i' \otimes x_j' - x_j' \otimes x_i' - \sum C_{ij}^k x_k' \,|\, 1 \leqslant i,j \leqslant n\Big\}$ 生成的理想. $\mathfrak{m}$ 的定义关系为

$$[x_i, x_j] - \sum_k C_{ij}^k x_k = 0, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

从这个例子可以看出，任何有限维李代数是某个自由李代数的商代数. 其实由自由李代数的定义知，这一结论可将“有限维”的条件去掉.

以下假定域 $F = \boldsymbol{C}$，并设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是一个不可约π-系Π对应的Cartan矩阵. 因而有

1) $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=2$;

2) $a_{ij}\in \mathbf{Z}_-, i\neq j$;

3) $a_{ij}=0$当且仅当$a_{ji}=0$;

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k=1,2,\cdots,n$;

5) 对任何置换矩阵P, PAP'都不是准对角矩阵.

若一个n阶方阵A满足上述性质1)、2)与3),则称A是一个**广义Cartan矩阵**. 若广义Cartan矩阵还满足性质5),则称为**不可分解广义Cartan矩阵**. 以下从一个不可约π-系对应的Cartan矩阵A出发构造李代数的过程对一般矩阵,尤其是对广义Cartan矩阵稍加改变也是可行的(参见Kac,《Infinite dimensional Lie algebras》).

引理4.7.2 设$A=(a_{ij})$是一个不可约π-系对应的Cartan矩阵,A的阶为n. 又设$\tilde{\mathfrak{g}}$是由

$$X=\{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_n;\tilde{h}_1,\tilde{h}_2,\cdots,\tilde{h}_n;\tilde{f}_1,\tilde{f}_2,\cdots,\tilde{f}_n\}$$

生成的$\mathbf{C}$上的自由李代数,V是$\mathbf{C}$上的n维线性空间,$v_1,v_2,\cdots,v_n$是V的基,$\tilde{\mathfrak{h}}=L(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2,\cdots,\tilde{h}_n)$是$\tilde{\mathfrak{g}}$的子空间,$\lambda\in\tilde{\mathfrak{h}}^*$,则

1) 可以定义$\tilde{\mathfrak{g}}$在V的张量代数

$$T(V)=\sum_{k=0}^{\infty}T^kV$$

上的作用,满足下面条件:

$$\tilde{h}\cdot 1=\lambda(\tilde{h})\cdot 1,\quad \forall h\in\tilde{\mathfrak{h}}; \tag{1}$$

$$\tilde{f}_i\cdot a=v_i\otimes a,\quad \forall a\in T(V), 1\leqslant i\leqslant n; \tag{2}$$

$$\tilde{h}_i(v_j\otimes a)=-a_{ji}v_j\otimes a+v_j\otimes\tilde{h}_i\cdot a,\quad \forall a\in T^kV; \tag{3}$$

$$\tilde{e}_i\cdot 1=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n; \tag{4}$$

$$\tilde{e}_i(v_j \otimes a) = \delta_{ij}\tilde{h}_i \cdot a + v_j \otimes \tilde{e}_i \cdot a, \quad \forall a \in T^k V. \tag{5}$$

2） $T(V)$ 对于 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的上述作用成为 $\tilde{\mathfrak{g}}$-模.

3） 设 $\tilde{K}$ 为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中由 $\{[\tilde{e}_i,\tilde{f}_j] - \delta_{ij}\tilde{h}_i, [\tilde{h}_i,\tilde{f}_j] + a_{ji}\tilde{f}_j, [\tilde{h}_i,\tilde{e}_j] - a_{ji}\tilde{e}_j, [\tilde{h}_i,\tilde{h}_j] \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ 生成的理想，则 $\tilde{K} \cdot T(V) = 0$.

4） $T(V)$ 也是 $\tilde{\mathfrak{g}}/\tilde{K}$-模.

证 1） 显然由(1)—(5) 可递推地定义 $\tilde{h}_i,\tilde{e}_i,\tilde{f}_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 在 $T(V)$ 上的线性作用. 由于 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 由 X 生成，故可定义 $\tilde{\mathfrak{g}}$在 $T(V)$ 上的作用.

2） 由于 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 是由 X 生成的自由李代数，由此知 $T(V)$ 是 $\tilde{\mathfrak{g}}$-模.

3） 显然，$\{x \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid x \cdot T(V) = 0\}$是 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的理想.

由(1)，(3) 两式，用归纳法容易证明 $\tilde{h}_i$ 的作用是对角的，于是

$$[\tilde{h}_i,\tilde{h}_j]T(V) = 0.$$

又由

$$\begin{aligned}[\tilde{e}_i,\tilde{f}_j] &= \tilde{e}_i(v_j \otimes a) - v_j \otimes \tilde{e}_i a \\ &= \delta_{ij}\tilde{h}_i a + v_j \otimes \tilde{e}_i a - v_j \otimes \tilde{e}_i a, \quad \forall a \in T^k V,\end{aligned}$$

因而知，

$$([\tilde{e}_i,\tilde{f}_j] - \delta_{ij}\tilde{h}_i)T(V) = 0.$$

再者，由(2) 与(3) 有

$$\begin{aligned}[\tilde{h}_i,\tilde{f}_j]a &= \tilde{h}_i(v_j \otimes a) - v_j \otimes \tilde{h}_i a \\ &= -a_{ji}v_j \otimes a + v_j \otimes \tilde{h}_i a - v_j \otimes \tilde{h}_i a, \quad \forall a \in T^k V,\end{aligned}$$

故

$$([\tilde{h}_i,\tilde{f}_j] + a_{ji}f_j)T(V) = 0.$$

显然，对于 $a \in T^0 V$，有$[\tilde{h}_i,\tilde{e}_j]a = \tilde{e}_j \cdot a = 0$，故

$$[\tilde{h}_i,\tilde{e}_j]a = a_{ji}\tilde{e}_j a.$$

若对 $a \in T^{s-1}V$ 上式也成立，取 $a = v_k \otimes a_1, a_1 \in T^{s-1}V$. 于是有

$$\begin{aligned}[\tilde{h}_i,\tilde{e}_j]a &= \tilde{h}_i(\delta_{jk}\tilde{h}_j a_1 + v_k \otimes \tilde{e}_j a_1) - \tilde{e}_j(-a_{ki}v_k \otimes a_1 + v_k \otimes \tilde{h}_i a_1) \\ &= \delta_{jk}\tilde{h}_i\tilde{h}_j a_1 - a_{ki}v_k \otimes \tilde{e}_j a_1 + v_k \otimes \tilde{h}_i\tilde{e}_j a_1 + a_{ki}\delta_{jk}\tilde{h}_j a_1 \\ &\quad + a_{ki}v_k \otimes \tilde{e}_j a_1 - \delta_{jk}\tilde{h}_j\tilde{h}_i a_1 - v_k \otimes \tilde{e}_j\tilde{h}_j a_1\end{aligned}$$

$$= a_{ki}\delta_{jk}\widetilde{h}_j a_1 + v_k \otimes [\widetilde{h}_i, \widetilde{e}_j] a_1$$
$$= a_{ji}(\delta_{jk}\widetilde{h}_j a_1 + v_k \otimes \widetilde{e}_j a_1)$$
$$= a_{ji}\widetilde{e}_j(v_k \otimes a_1),$$

即有

$$([\widetilde{h}_i, \widetilde{e}_j] - a_{ji}\widetilde{e}_j)T(V) = 0.$$

综上所得结果,知 $\widetilde{K} \cdot T(V) = 0$.

4) 由结论 3) 知 $T(V)$ 为 $\widetilde{\mathfrak{g}}/\widetilde{K}$-模. ▌

这里我们要注意上述证明并未用到 λ 的特殊性,故 $T(V)$ 作为 $\widetilde{\mathfrak{g}}$-模及 $\widetilde{K}$ 的构造与 λ 的选取无关. 特别,可取 $\lambda = 0$,即有

$$\widetilde{h}_i \cdot 1 = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

下面我们讨论李代数 $\widetilde{\mathfrak{g}}/\widetilde{K}$ 的结构.

引理 4.7.3 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 与 $\widetilde{K}$ 如同引理 4.7.2 所述. 又设 π 为 $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 到 $\widetilde{\mathfrak{g}}/\widetilde{K}$ 的自然同态. 记

$$\hat{h}_i = \pi(\widetilde{h}_i), \hat{e}_i = \pi(\widetilde{e}_i), \hat{f}_i = \pi(\widetilde{f}_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

$\hat{\mathfrak{n}}_+$ 为 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n$ 生成的 $\widetilde{\mathfrak{g}}/\widetilde{K}$ 的子代数; $\hat{\mathfrak{n}}_-$ 为 $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_n$ 生成的子代数; $\hat{\mathfrak{h}}$ 为 $\hat{h}_1, \hat{h}_2, \cdots, \hat{h}_n$ 生成的子代数,则下面的结论成立:

1) $\hat{\mathfrak{h}}$ 是交换子代数,且有基 $\hat{h}_1, \hat{h}_2, \cdots, \hat{h}_n$;

2) $\hat{\mathfrak{n}}_-$ 是 $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_n$ 生成的自由李代数;

3) $\hat{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}}/\widetilde{K}$ 有子代数的直和分解

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}}_+ \dotplus \hat{\mathfrak{h}} \dotplus \hat{\mathfrak{n}}_-; \tag{6}$$

4) $\hat{\mathfrak{g}}$ 有唯一的对合自同构 $\hat{\omega}$ 满足

$$\hat{\omega}(\hat{e}_i) = -\hat{f}_i, \quad \hat{\omega}(\hat{f}_i) = -\hat{e}_i, \quad \hat{\omega}(\hat{h}_i) = -\hat{h}_i, \tag{7}$$

因而 $\hat{\mathfrak{n}}_+$ 是 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \cdots, \hat{e}_n$ 生成的自由李代数.

证 1) 由 $\widetilde{K}$ 的定义知 $[\widetilde{h}_i, \widetilde{h}_j] \in \widetilde{K}$,即有 $[\hat{h}_i, \hat{h}_j] = 0$. 故 $\hat{\mathfrak{h}}$ 是由 $\hat{h}_1, \hat{h}_2, \cdots, \hat{h}_n$ 生成的交换子代数. 因而 $\hat{h} \in \hat{\mathfrak{h}}$,有 $a_i \in \boldsymbol{C}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使得 $\hat{h} = \sum_{i=1}^{n} a_i \hat{h}_i$.

下面证明$\hat{h}_1,\hat{h}_2,\cdots,\hat{h}_n$是线性无关的. 如果$\hat{h}=\sum_{i=1}^{n}a_i\hat{h}_i=0$,故

$\widetilde{h}=\sum_{i=1}^{n}a_i\widetilde{h}_i\in\widetilde{K}$,进而$\widetilde{h}\cdot T(V)=0$. 因而

$$\widetilde{h}\cdot v_j=\sum_{i=1}^{n}a_i\widetilde{h}_i v_j=\sum_{i=1}^{n}(-a_i a_{ji})v_j=0,$$

由此得

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ji}a_i=0,\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

注意到$A=(a_{ij})$是可逆矩阵. 故$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. 故$\hat{h}_1,\hat{h}_2,\cdots,\hat{h}_n$是线性无关的,即为$\hat{\mathfrak{h}}$的基.

2) 作$\hat{\mathfrak{n}}_-$到$T(V)$的映射使得$\hat{f}_i\to v_i,1\leqslant i\leqslant n$. 由于$\hat{f}_i\cdot a=v_i\otimes a,\ \forall a\in T(V)$,知这是一一的,而且不难将此映射扩充为$\hat{\mathfrak{n}}_-$的通用包络代数$U(\hat{\mathfrak{n}}_-)$与$T(V)$的同构($\forall x\in\hat{\mathfrak{n}}$,令$x\to x\cdot 1$). 因而$\hat{\mathfrak{n}}_-$与$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$生成的自由李代数同构. 故$\hat{\mathfrak{n}}_-$是$\hat{f}_1,\hat{f}_2,\cdots,\hat{f}_n$生成的自由李代数.

3) 用归纳法不难证明$\{\hat{e}_i,\hat{f}_i,\hat{h}_i,1\leqslant i\leqslant n\}$中任意$S$个元素(可以重复出现)的括积一定在$\hat{\mathfrak{n}}_-+\hat{\mathfrak{h}}+\hat{\mathfrak{n}}_+$之中,即有

$$\hat{\mathfrak{g}}=\hat{\mathfrak{n}}_-+\hat{\mathfrak{h}}+\hat{\mathfrak{n}}_+,$$

又设$n_+\in\hat{\mathfrak{n}}_+,n_-\in\hat{\mathfrak{n}}_-,h\in\hat{\mathfrak{h}}$使得

$$u=n_++h+n_-=0.$$

于是

$$0=u\cdot 1=n_+\cdot 1+\lambda(h)1+n_-\cdot 1.$$

注意到$n_+\cdot 1=0,\lambda=0$,故有

$$n_-\cdot 1=0.$$

在证明结论2)时知$u(\hat{\mathfrak{n}}_-)$与$T(V)$同构,且$n_-\to n_-\cdot 1$,故$n_-=0$.

由$\widetilde{\mathfrak{g}}$-模$T(V)$的定义知,$n_+\cdot v_j\in T^0V$,故有

$$n_+ \cdot v_j + h \cdot v_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

$n_+ v_j \in T^0V, h \cdot v_j \in T^1V$，故

$$h \cdot v_j^2 = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

于是 $h = 0$，进而 $n_+ = 0$，故

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{n}}_- \dotplus \hat{\mathfrak{h}} \dotplus \hat{\mathfrak{n}}_+.$$

4) 在 $\hat{\mathfrak{g}}$ 中可定义线性变换 $\hat{\omega}$ 满足(7)式及

$$\begin{aligned}&\hat{\omega}([x_1,[x_2,\cdots,[x_{m-1},x_m]\cdots]])\\ &\quad = [\hat{\omega}(x_1),[\hat{\omega}(x_2),\cdots,[\hat{\omega}(x_{m-1}),\hat{\omega}(x_m)]\cdots]],\end{aligned}$$

其中 $x_i \in \{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\cdots,\hat{e}_n,\hat{f}_1,\hat{f}_2,\cdots,\hat{f}_n,\hat{h}_1,\hat{h}_2,\cdots,\hat{h}_n\}$.

用归纳法不难证明，对任何 m，$\hat{\omega}$ 的定义是合理的，从而得到 $\hat{\omega}$ 是 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的对合自同构.

由(7)式知，$\hat{\omega}(\hat{\mathfrak{n}}_-) = \hat{\mathfrak{n}}_+$，$\hat{\omega}(f_i) = -\hat{e}_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，故 $\hat{\mathfrak{n}}_+$ 是由 $\hat{e}_1,\hat{e}_2,\cdots,\hat{e}_n$ 生成的自由李代数. ▌

为进一步讨论 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的性质，我们引进下面一些符号. 在 $\hat{\mathfrak{h}}$ 的对偶空间 $\hat{\mathfrak{h}}^*$ 中取元素 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使得

$$\alpha_i(\hat{h}_j) = a_{ji}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n. \tag{8}$$

由于 $\hat{h}_1,\hat{h}_2,\cdots,\hat{h}_n$ 为 $\hat{\mathfrak{h}}$ 的基，$A = (a_{ij})$ 为非退化矩阵，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 由(8)式唯一确定，且构成 $\hat{\mathfrak{h}}^*$ 的基. 令

$$Q = \left\{\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \,|\, k_i \in \mathbf{Z}, i = 1,2,\cdots,n\right\}, \tag{9}$$

$$Q_+ = \left\{\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \,|\, k_i \in \mathbf{Z}_+, i = 1,2,\cdots,n\right\}. \tag{10}$$

显然，从 $\alpha_i(\hat{h}_j) = a_{ji} \in \mathbf{Z}$，得到

$$\alpha(\hat{h}_j) \in \mathbf{Z}, \quad \forall \alpha \in Q. \tag{11}$$

引理 4.7.4 沿用引理 4.7.3 的符号及上面(9)，(10)两式的符号，则下述结果成立.

1) $\hat{\mathfrak{g}}$ 对 $\hat{\mathfrak{h}}$ 的分解为

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{h}} \dotplus \sum_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}} \hat{\mathfrak{g}}_\alpha \dotplus \sum_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}} \hat{\mathfrak{g}}_{-\alpha},$$

其中

$$\hat{\mathfrak{g}}_\alpha = \{x \in \hat{\mathfrak{g}} \mid [h,x] = \alpha(h)x, \forall h \in \hat{\mathfrak{h}}\}.$$

2) 令

$$x_{ij} = (\mathrm{ad}\, \hat{e}_i)^{-a_{ji}+1} \hat{e}_j, \quad i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant n,$$
$$y_{ij} = (\mathrm{ad}\, \hat{f}_i)^{-a_{ji}+1} \hat{f}_j, \quad i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

I,J 分别为 $\{x_{ij}\},\{y_{ij}\}$ 生成的 $\hat{\mathfrak{n}}_+$，$\hat{\mathfrak{n}}_-$ 的理想，则 I,J 也是 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的理想，且 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的理想 $K=I+J$ 与 $\hat{\mathfrak{h}}$ 平凡相交，即 $K\cap\hat{\mathfrak{h}}=\{0\}$.

证 1) 由于(6)式，且 $\hat{\mathfrak{n}}_-$ 是由 $\hat{f}_1,\hat{f}_2,\cdots,\hat{f}_n$ 生成的自由李代数，故 $\hat{\mathfrak{n}}_-$ 中元素可以表示为形如

$$y_{i_1i_2\cdots i_m} = [\hat{f}_{i_1},[\hat{f}_{i_2},\cdots,[\hat{f}_{i_{m-1}},\hat{f}_{i_m}]\cdots]]$$

的元素的线性组合. 又

$$[\hat{h}_i, y_{i_1i_2\cdots i_m}] = -(a_{i_1i}+a_{i_2i}+\cdots+a_{i_mi})\, y_{i_1i_2\cdots i_m}$$
$$= -(\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_m})(\hat{h}_i)\, y_{i_1i_2\cdots i_m},$$

于是有

$$y_{i_1i_2\cdots i_m} \in \hat{\mathfrak{g}}_{-(\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_m})},$$

因而有

$$\hat{\mathfrak{n}}_- = \sum_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}} \hat{\mathfrak{g}}_{-\alpha}.$$

同样有

$$\hat{\mathfrak{n}}_+ = \sum_{\substack{\alpha\in Q_+\\ \alpha\neq 0}} \hat{\mathfrak{g}}_{\alpha},$$

即结论 1) 成立.

2) 为证明 I,J 为 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的理想，先证明

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ad}\,\hat{e}_k(y_{ij}) &= 0, \\ \mathrm{ad}\,\hat{f}_k(x_{ij}) &= 0, \end{aligned}\right. \quad 1\leqslant i,j,k\leqslant n, i\neq j.$$

这两个关系的证明完全相同. 因而我们只要证明其中之一即可.

当 $k \neq i$ 时,由 $[\hat{e}_k, \hat{f}_i] = 0$,知

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}\,\hat{e}_k(y_{ij}) &= (\mathrm{ad}\,\hat{f}_i)^{-a_{ji}+1}\mathrm{ad}\,\hat{e}_k(\hat{f}_j) = \delta_{kj}(\mathrm{ad}\,\hat{f}_i)^{-a_{ji}+1}\hat{h}_j \\ &= \delta_{kj}(\mathrm{ad}\,\hat{f}_i)^{-a_{ji}}(a_{ij}\hat{f}_i).\end{aligned}$$

由于 $a_{ij} \neq 0$ 当且仅当 $a_{ji} \neq 0$,因而

$$\mathrm{ad}\,\hat{e}_k(y_{ij}) = 0.$$

设 $k = i$. 令 $\mathfrak{s} = L(\hat{e}_i, \hat{f}_i, \hat{h}_i)$,则 $\mathfrak{s}$ 是 3 维单李代数. 于是 $(\mathrm{ad}, \hat{\mathfrak{g}})$ 为 $\mathfrak{s}$ 的表示. 由于 $[\hat{e}_i, \hat{f}_j] = 0, [\hat{h}_i, \hat{f}_j] = -a_{ji}\hat{f}_j$. 由第三章 §1 知由

$$\hat{f}_j, (\mathrm{ad}\,\hat{f}_i)\hat{f}_j, \cdots, (\mathrm{ad}\,\hat{f}_i)^t\hat{f}_j, \cdots$$

张成一个不变子空间,而且有

$$\mathrm{ad}\,\hat{e}_i(\mathrm{ad}\,\hat{f}_i)^t\hat{f}_j = t(-a_{ji} - t + 1)(\mathrm{ad}\,\hat{f}_i)^{t-1}\hat{f}_j.$$

特别 $t = -a_{ji} + 1$ 时,有

$$\mathrm{ad}\,\hat{e}_i(\mathrm{ad}\,\hat{f}_i)^{-a_{ji}+1}\hat{f}_j = \mathrm{ad}\,\hat{e}_i(y_{ij}) = 0.$$

下面证明 I, J 为 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的理想. 同样,只要证明其中之一即可. 由

$$\mathrm{ad}\hat{h}_k(y_{ij}) = ((a_{ji} - 1)a_{ik} - a_{jk})y_{ij},$$

$$[\hat{h}_k, \hat{\mathfrak{n}}_-] \subseteq \hat{\mathfrak{n}}_-$$

知 $[\hat{\mathfrak{h}}, J] \subseteq J$. 又 $[\hat{\mathfrak{n}}_-, J] \subseteq J$,再由

$$\mathrm{ad}\,\hat{e}_k(y_{ij}) = 0, \quad \mathrm{ad}\,\hat{e}_k(\hat{\mathfrak{n}}_-) \subseteq \hat{\mathfrak{h}} + \hat{\mathfrak{n}}_-$$

知 $\mathrm{ad}\,\hat{e}_k(J) \subseteq J$. 而 $\{\hat{e}_k\}$ 生成 $\hat{\mathfrak{n}}_+$,故 $[\hat{\mathfrak{n}}_+, J] \subseteq J$. 于是 $[\hat{\mathfrak{g}}, J] \subseteq J$,即 J 为 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的理想. 同理 I 也是 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的理想.

显然,$(I + J) \cap \hat{\mathfrak{h}} = \{0\}$.

显然,$K = I + J$ 是由 $\{x_{ij}, y_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j\}$ 生成的 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的理想. ▌

定理 4.7.5 设 $\hat{\mathfrak{g}}$, K 如引理 4.7.4 所述,又记 π 为 $\hat{\mathfrak{g}}$ 到 $\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{g}}/K$ 的自然同态,而且记

$$\mathfrak{h} = \pi(\hat{\mathfrak{h}}), \quad \mathfrak{n}_+ = \pi(\hat{\mathfrak{n}}_+), \quad \mathfrak{n}_- = \pi(\hat{\mathfrak{n}}_-);$$

$$h_i = \pi(\hat{h}_i), \quad e_i = \pi(\hat{e}_i), \quad f_i = \pi(\hat{f}_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

则有下面结果：

1) $\mathfrak{g}$ 由 $\{h_i, e_i, f_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 生成，且

$$[h_i, h_j] = 0, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n;$$
$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n;$$
$$[h_i, e_j] = a_{ji} e_j, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n;$$
$$[h_i, f_j] = -a_{ji} f_j, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n;$$
$$(\mathrm{ad} e_i)^{-a_{ji}+1} e_j = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j;$$
$$(\mathrm{ad} f_i)^{-a_{ji}+1} f_j = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j.$$

2) $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 为 $\mathfrak{h}$ 的基. $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h) x, \forall\, h \in \mathfrak{h}\},$$
$$\Delta = (Q_+ \cap \Delta) \cup (Q_- \cap \Delta).$$

Q, Q_+ 可由(8)—(10) 式定义，只是将(8) 式中 $\hat{h}_j$ 换成 h_j. $Q_- = -Q_+$.

证 1) 由引理 4.7.4 知 1) 成立.

2) 因为 $k \cap \hat{\mathfrak{h}} = \{0\}$，故 $\mathfrak{h} = \pi(\hat{\mathfrak{h}})$ 与 $\mathfrak{h}$ 同构. 因此 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 为 $\mathfrak{h}$ 的基.

由 $\hat{\mathfrak{n}}_+ \cap K = I$，故 $\mathfrak{n}_+ = \pi(\hat{\mathfrak{n}}_+) = \hat{\mathfrak{n}}_+ / I$；由 $\hat{\mathfrak{n}}_- \cap K = J$，故 $\mathfrak{n}_- = \pi(\hat{\mathfrak{n}}_-) = \hat{\mathfrak{n}}_- / J$. 于是有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \dotplus \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{n}_-.$$

由 $\hat{\mathfrak{h}}$ 与 $\mathfrak{h}$ 同构，故 $\hat{\mathfrak{h}}^*$ 与 $\hat{\mathfrak{h}}^*$ 同构. 因而再由引理 4.7.4 知结论 2) 成立. ▌

我们最终将证明 $\mathfrak{g}$ 就是以 A 为 Cartan 矩阵的单李代数，从而给出了单李代数的存在性一个统一的证明. 但是，目前我们甚至还不知道 $\mathfrak{g}$ 的维数是否有限. 为此，我们要进一步研究 $\mathfrak{g}$ 的某些内自

同构的性质.

习　　题

1. 设X是一个非空集合，称域F上的结合代数$\tilde{\mathfrak{a}}$为由X生成的**自由结合代数**，如果X到结合代数$\mathfrak{a}$中任一同态θ都能唯一地开拓为$\tilde{\mathfrak{a}}$到$\mathfrak{a}$的同态. 试证：由非空集合X生成的域F上的自由结合代数存在，且在同构意义下是唯一的.

2. 设$\tilde{\mathfrak{a}}$，$\tilde{\mathfrak{g}}$分别为非空集合X生成的自由结合代数，自由李代数. 证明：$\tilde{\mathfrak{a}}$是$\tilde{\mathfrak{g}}$的通用包络代数.

3. 设$\tilde{\mathfrak{g}}$是$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$生成的自由李代数，$K$是$\{[x_i, x_j] \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$生成的$\tilde{\mathfrak{g}}$的理想. 试求$\tilde{\mathfrak{g}}/K$的维数与结构.

4. 设$\tilde{\mathfrak{g}}$是$X = \{e, f, h\}$生成的域$\boldsymbol{C}$上的自由李代数，K是$\{[e,f] - h, [h,e] - e, [h,f] + f\}$生成的$\tilde{\mathfrak{g}}$的理想. 试求$\tilde{\mathfrak{g}}/K$的结构.

§8　复单李代数的存在

上节我们对一个不可约π-系$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$对应的Cartan 矩阵$A = (a_{ij})$构造了李代数$\tilde{\mathfrak{g}}$（引理 4.7.2），$\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}/\widetilde{K}$（引理 4.7.2）及$\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{g}}/K$（定理 4.7.5）. 本节将证明$\mathfrak{g}$是单李代数.

由于$\tilde{\mathfrak{h}}$，$\hat{\mathfrak{h}}$与$\mathfrak{h}$是同构的，故在以后不再区分它们. 特别，可将$\tilde{h}_i$，$\hat{h}_i$与$h_i (i = 1, 2, \cdots, n)$等同起来. 令$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R} \cdot h_i$，于是$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}} + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$. 由于$\alpha_i \in \mathfrak{h}^* (i = 1, 2, \cdots, n)$使得$A = (\alpha_i(h_j))$是非退化的实方阵，于是$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}\alpha_i = \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$，且$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$的一组基；

$$\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^* + \sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*; \quad Q = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \,\middle|\, k_i \in \boldsymbol{Z} \right\} \subseteq \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*.$$

由 $A=(a_{ij})$ 是不可约 π-系对应的 Cartan 矩阵，于是在 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^{*}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{R}\alpha_i$ 中可以引进度量 (x,y) 使其为 Euclid 空间，且

$$a_{ij}=\alpha_i(h_j)=2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j).$$

我们可用度量 (x,y) 将 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}=(\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^{*})^{*}$ 与 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^{*}$ 等同起来. 显然，

$$h_j=2\alpha_j/(\alpha_j,\alpha_j).$$

引理 4.8.1 设 r_{α_i} 为 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 中关于超平面 $\mathfrak{h}_{\alpha}=\{x\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}\mid(x,\alpha_i)=0\}$ 的反射，以 W 表示由 $\{r_{\alpha_i}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成的 $\mathscr{O}(\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}})$ 的子群，则 $\forall\, w\in W, wQ=Q$ 并且 W 是有限群.

证 显然 $r_{\alpha_i}\in\mathscr{O}(\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}})$，又

$$r_{\alpha_i}(\alpha_j)=\alpha_j-\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i=\alpha_j-a_{ji}\alpha_i,$$

于是 $r_{\alpha_i}Q=Q$. 显然，$\forall\, w\in W, w(Q)=Q$.

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中至多两种长度，因而集合 $\{w(\alpha_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n, w\in W\}$ 中元素也至多两种长度. 又 $\{w(\alpha_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n, w\in W\}\subseteq Q$，故 $\{w(\alpha_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n, w\in W\}$ 是有限集，而含有 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 的基. 于是 W 也是有限的，即 W 是有限群. ▌

显然，$r_{\alpha_i}(1\leqslant i\leqslant n)$ 与 $w(\in W)$ 可扩充为 $\mathfrak{h}$ 的线性变换，即 W 可视为 $GL(\mathfrak{h})$ 的子群.

引理 4.8.2 设 $\mathfrak{g}=\hat{\mathfrak{g}}/K$ 如同本章 §7 所述. 则

1) $\mathrm{ad}e_i, \mathrm{ad}f_i$ 是局部幂零的；

2) $\mathfrak{g}$ 的自同构

$$\theta_{\alpha_i}=\exp(\mathrm{ad}e_i)\exp(-\mathrm{ad}f_i)\exp(\mathrm{ad}e_i)$$

使 $\mathfrak{h}$ 及 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 不变，且

$$\theta_{\alpha_i}|_{\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}}=r_{\alpha_i};$$

进而，$\forall\, w\in W$，存在 $\mathfrak{g}$ 的自同构 θ，使

$$\theta|_{\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}}=w.$$

3) 以 Δ 表示 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系，则 $w(\Delta)=\Delta, \forall\, w\in W$.

证 1) 令

$$M = \{x \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}e_i)^k x = 0, k \in \boldsymbol{N}\}.$$

显然 M 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间. 又若 $x,y \in M$, 即有 $k_1,k_2 \in \boldsymbol{N}$, 使得 $(\mathrm{ad}e_i)^{k_1}x = (\mathrm{ad}e_i)^{k_2}y = 0$, 故

$$(\mathrm{ad}e_i)^{k_1+k_2}([x,y]) = 0,$$

因而$[x,y] \in M$. 故 M 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 又由于

$$(\mathrm{ad}e_i)^{-a_{ij}+1}e_j = 0, \quad j \neq 0;$$

$$(\mathrm{ad}e_i)e_i = 0;$$

$$(\mathrm{ad}e_i)^2 h_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n;$$

$$(\mathrm{ad}e_i)^3 f_j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

所以 $e_j, f_j, h_j \in M (1 \leqslant j \leqslant n)$, 于是 $M = \mathfrak{g}$. 由此可知 $\mathrm{ad}e_i$ 是局部幂零的. 同样 $\mathrm{ad}f_i$ 是局部幂零的.

2) 由定理 4.4.2 知 $\theta_{\alpha_i} \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 并用完全类似于定理 4.4.1 的证明方法可以证明 $\theta_{\alpha_i}(\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}) = \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$, 且 $\theta_{\alpha_i}|_{\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}} = r_{\alpha_i}$. 于是对 $w \in W$, 存在 $\theta \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 使得 $\theta|_{\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}} = w$.

3) 设 $w \in W$. 于是由结论 2) 有 $\theta \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$, 使得 $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, $\theta(\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}) = \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$, 且 $\theta|_{\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}} = w$. 又设 $\alpha \in \Delta, e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, h \in \mathfrak{h}$, 则

$$[h,\theta(e_\alpha)] = \theta([\theta^{-1}(h),e_\alpha]) = \theta((\alpha,\theta^{-1}(h))e_\alpha)$$
$$= (w(\alpha),h)\theta(e_\alpha),$$

即有 $\theta(e_\alpha) \in \mathfrak{g}_{w(\alpha)}$. 因而 $w(\Delta) = \Delta$. ▌

推论 令 $\Delta_1 = \{w(\alpha_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, w \in W\}$, 则

$$\Delta_1 \subseteq \Delta; \quad \Delta_1 = (\Delta_1 \cap Q_+) \cup (\Delta_1 \cup Q_-).$$

事实上, 由 $\alpha_i \in \Delta$, 故 $w(\alpha_i) \in \Delta$. 因而 $\Delta_1 \subseteq \Delta$. 又由定理4.7.5 的结论 2) 知 $\Delta = (\Delta \cap Q_+) \cup (\Delta \cap Q_-)$, 于是 $\Delta_1 = (\Delta_1 \cap Q_+) \cup (\Delta_1 \cap Q_-)$.

引理4.8.3 设$\lambda \in Q_+ \cup Q_-$, 且$\lambda \overline{\in} \{k\alpha \mid k \in \boldsymbol{Z}, \alpha \in \Delta_1\}$, 则存在 $w \in W$, 使得 $w(\lambda) \overline{\in} Q_+ \cup Q_-$.

证 若$\lambda \neq k\alpha$, $\forall\, k \in \boldsymbol{Z}, \alpha \in \Delta_1$, 则

$$\mathfrak{h}_\lambda - \bigcup_{\alpha\in\Delta_1}\mathfrak{h}_\alpha \neq \varnothing.$$

取 $\lambda_1 \in \mathfrak{h}_\lambda - \bigcup\limits_{\alpha\in\Delta_1}\mathfrak{h}_\alpha$. 于是类似于引理 4.2.1，可以证明，$\exists\ w\in W$，使得

$$(w(\lambda_1),\alpha_i) > 0, \quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

另一方面，若 $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i\alpha_i \in Q_+ \cup Q_-$，$w(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i'\alpha_i$，则

$$0 = (\lambda,\lambda_1) = (w(\lambda),w(\lambda_1)) = \sum_{i=1}^{n} k_i'(\alpha_i,w(\lambda_1)),$$

于是 $w(\lambda) \overline{\in} Q_+ \cup Q_-$. ▌

推论 $\Delta_1 \subseteq \Delta \subseteq \{k\alpha \mid k\in \mathbf{Z},\alpha\in\Delta_1\}$.

事实上，若 $\lambda\in\Delta$，则 $\forall\ w\in W$，$w(\lambda)\in\Delta\subseteq Q_+\cup Q_-$，于是，由引理 4.8.3 知结论成立. ▌

有了上述准备之后，我们可以证明，对任一不可约 π-系，一定存在一个复单李代数以此不可约 π-系为素根系. 这只要证明在本章 §7 中构造的 $\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{g}}/K$ 为单李代数即可.

定理 4.8.4 设 $A = (a_{ij})$ 为不可约 π-系 $\Pi = \{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 对应的 Cartan 矩阵，又

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$$

如前所述，则 $\mathfrak{g}$ 为复单李代数.

证 首先我们证明

$$\Delta = \Delta_1 = \{w(\alpha_i) \mid 1\leqslant i\leqslant n, w\in W\}.$$

由引理 4.8.3 的推论知

$$\Delta_1 \subseteq \Delta \subseteq \{k\alpha \mid k\in\mathbf{Z},\alpha\in\Delta_1\}.$$

若 $k\alpha\in\Delta$，$k\in\mathbf{Z}$，$\alpha\in\Delta_1$，则有 $w\in W$ 及 $\alpha_i\in\Pi$，使得 $w(\alpha)=\alpha_i$. 于是由 $w(\Delta)=\Delta$，知 $w(k\alpha)=k\alpha_i\in\Delta$. 但是由引理 4.7.4 与定理 4.7.5 知 $k\alpha_i\in\Delta$ 当且仅当 $k=\pm 1$，即 $k\neq\pm 1$ 时，$k\alpha\overline{\in}\Delta$. 于是

$$\Delta_1 = \Delta.$$

由于 $\dim\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \dim\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = 1$，由引理 4.8.2 的证明知 $\dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$，$\forall\, \alpha \in \Delta$.

设 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 中交换理想，于是由 $[\mathfrak{h},\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$ 知 $\mathfrak{a}$ 有下面的分解：

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{a}.$$

若 $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{a} \neq 0$，由 $\dim\mathfrak{g}_\alpha = 1$，知 $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{a}$. 由此知 $\{\alpha,\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}\} \subseteq \mathfrak{a}$，但 $\{\alpha,\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}\}$ 生成的子代数是非交换的，故 $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{a} = \{0\}$，$\forall\, \alpha \in \Delta$. 因而 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$. 若 $h \in \mathfrak{a}$，则

$$[h, e_{\alpha_i}] = (\alpha_i, h) e_{\alpha_i} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

即

$$(\alpha_i, h) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

于是 $h = 0$，即 $\mathfrak{a} = \{0\}$. 故 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数.

容易证明，$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，且可在 $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 选取次序使 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 为素根系. 由 Π 是不可约的，故 $\mathfrak{g}$ 是单李代数. ▌

注 用本章 §7 与 §8 中的方法，还可以构造一类极重要的无限维李代数，即 Kac-Moody 代数. 详细的介绍可参看 V. Kac 所著 "Infinite dimensional Lie algebras"(second Edition, Cambridge University Press, 1985) 的第一章至第四章.

习 题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 对应的不可约 π-系为 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$. 试按照本章 §7 与 §8 的方法构造 $\tilde{\mathfrak{g}}$，$\hat{\mathfrak{g}}$ 与 $\mathfrak{g}$，并证明 $\mathfrak{g}$ 与 $sl(3,\boldsymbol{C})$ 同构.

2. 设 $A = 0$ 是 n 阶方阵，$\mathfrak{h}$ 是 $2n$ 维的线性空间.

1) 试证在 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{h}^*$ 中分别存在线性无关部分组 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 使得

$$\alpha_i(h_j) = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

2) 试证存在由 $\mathfrak{h}, e_i, f_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 生成的李代数 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 满足下列

定义关系：

$$\begin{aligned}
&[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, && 1 \leqslant i, j \leqslant n;\\
&[h, h'] = 0, && \forall\, h, h' \in \mathfrak{h};\\
&[h, e_i] = \alpha_i(h) e_i, && \forall\, h \in \mathfrak{h};\\
&[h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i, && \forall\, h \in \mathfrak{h}.
\end{aligned}$$

3) 设 $\mathfrak{r}$ 为 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 的与 $\mathfrak{h}$ 平凡相交($\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r} = (0)$)的极大理想，试求 $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$ 的结构.

4) 求 $\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r}$ 的中心 C 与导代数$(\hat{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r})'$.

5) 令 $C_1 = \left\{\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, x_i \in \mathscr{F}\right\}$. 试证 C_1 是$(\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r})'$ 的理想，且$(\tilde{\mathfrak{g}}/\mathfrak{r})'/C_1$ 是 $2n+1$ 维 Heisenberg 代数(参看第一章 §4 的习题 3).

第五章　复半单李代数的分类

本章将讨论复半单李代数的分类问题. 自然,这个问题归结为复单李代数的分类问题. 首先,我们将证明一个复单李代数只与一个 Dynkin 图相对应. 这一事实,主要依赖于复李代数的 Cartan 子代数是共轭的. 其次,我们将证明两个复单李代数若有相同的 Dynkin 图,它们必定是同构的. 由于连通 Dynkin 图的分类问题业已解决,故复半单李代数的分类问题也就圆满地解决了.

§1　可解李代数的 Cartan 子代数

设 $\mathfrak{g}$ 为复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的李代数. 沿用第四章 §4 的符号,以 $\mathscr{N}(\mathfrak{g})$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的强幂零元素的集合. $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 表示由 $\{\exp(\mathrm{ad}x) \mid x \in \mathscr{N}(\mathfrak{g})\}$ 生成的 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的子群. 除在第四章 §4 中所述有关 $\mathscr{N}(\mathfrak{g})$, $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 的一些性质外,下面的性质也是有用的.

引理 5.1.1　设 φ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 到李代数 $\mathfrak{g}_1$ 的满同态, $\mathscr{N}(\mathfrak{g})$, $\mathscr{N}(\mathfrak{g}_1)$ 分别为 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$ 的强幂零元素集,则

$$\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{g})) = \mathscr{N}(\mathfrak{g}_1), \tag{1}$$

而且对 $\sigma' \in \mathscr{E}(\mathfrak{g}_1)$,一定存在 $\sigma \in \mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 满足

$$\varphi \circ \sigma = \sigma' \circ \varphi. \tag{2}$$

即下图为交换的同态图表:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{g}_1 \\ \downarrow{\sigma} & & \downarrow{\sigma'} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{g}_1 \end{array}$$

证　设 $x,y \in \mathfrak{g}$. 由

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)]$$

知

$$\varphi \cdot \mathrm{ad}y = \mathrm{ad}\varphi(y) \cdot \varphi, \quad \forall\, y \in \mathfrak{g}. \tag{3}$$

于是,

$$\left(\mathrm{ad}\varphi(y) - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}\right) \cdot \varphi = \varphi \cdot \left(\mathrm{ad}y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right), \quad \forall\, \lambda \in \boldsymbol{C}.$$

由此可得

$$\varphi\left(\mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}y)\right) \subseteq \mathfrak{g}_{1\lambda}\left(\mathrm{ad}\varphi(y)\right),$$

因而

$$\varphi(\mathscr{N}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathscr{N}(\mathfrak{g}_1).$$

反之,设 $x' \in \mathscr{N}(\mathfrak{g}_1)$,故有 $y' \in \mathfrak{g}_1, \lambda \in \boldsymbol{C}, \lambda \neq 0$ 及 $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{N}$ 使得

$$\left(\mathrm{ad}y' - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}\right)^k x' = 0.$$

由于 φ 是满同态,于是 $\exists\, x,y \in \mathfrak{g}$ 使得 $x' = \varphi(x), y' = \varphi(y)$. 因而

$$\left(\mathrm{ad}\varphi(y) - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}\right)^k \varphi(x) = \varphi\left(\left(\mathrm{ad}y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right)^k x\right) = 0,$$

故

$$z = \left(\mathrm{ad}y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right)^k x \in \mathrm{Ker}\varphi.$$

由于 $\mathrm{Ker}\varphi$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,自然为 $\mathrm{ad}y$ 的不变子空间,于是有 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的子空间 V_1 满足下面三个条件:

$$\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}y) \dotplus V_1,$$

$$\mathrm{ad}y(V_1) \subseteq V_1,$$

$$\left(\mathrm{ad}y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right)\Big|_{V_1} \in GL(V_1).$$

于是,有 $z_0 \in \mathrm{Ker}\varphi \cap \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}y), z_1 \in V_1$ 使得

$$z = z_0 + z_1,$$

及 $k_1 \in \boldsymbol{N}$ 使得

$$\left(\mathrm{ad}y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right)^{k_1} x = \left(\mathrm{ad}y - \lambda \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\right)^{k_1 - k} z_1 \in V_1.$$

由于$(\mathrm{ad}y-\lambda\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\Big|_{V_1}\in GL(V_1)$，故有$z_2\in V_1$，使得

$$(\mathrm{ad}y-\lambda\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k_1-k}z_1=(\mathrm{ad}y-\lambda\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k_1}z_2,$$

于是

$$(\mathrm{ad}y-\lambda\,\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})^{k_1}(x-z_2)=0,$$

即$x-z_2\in\mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}y)$. 但是

$$\varphi(x-z_2)=\varphi(x)=x',$$

因而

$$\varphi(\mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}y))=\mathfrak{g}_{1\,\lambda}(\mathrm{ad}\varphi(y)).$$

由此可得

$$\varphi(\mathcal{N}(\mathfrak{g}))=\varphi\Big(\bigcup_{\substack{y\in\mathfrak{g}\\ \lambda\neq 0}}\mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}y)\Big)=\bigcup_{\substack{\varphi(y)\in\mathfrak{g}_1\\ \lambda\neq 0}}\mathfrak{g}_{1\,\lambda}(\mathrm{ad}\varphi(y))$$
$$=\mathcal{N}(\mathfrak{g}_1),$$

即(1)式成立.

不妨设σ'为$\mathcal{N}(\mathfrak{g}_1)$的生成元，即$\sigma'=\exp\mathrm{ad}x'$，$x'\in\mathcal{N}(\mathfrak{g}_1)$. 由(1)式知，有$x\in\mathcal{N}(\mathfrak{g})$，使得$x'=\varphi(x)$，故$\sigma=\exp\mathrm{ad}x\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$. 由(3)式得

$$\varphi\cdot\sigma=\varphi\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathrm{ad}x)^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\varphi\cdot(\mathrm{ad}x)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathrm{ad}\varphi(x))^n\varphi=\sigma'\cdot\varphi.$$

因而$\forall\,\sigma'\in\mathscr{E}(\mathfrak{g}_1)$，存在$\sigma\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$使(2)式成立. ▌

引理5.1.2 设φ是李代数$\mathfrak{g}$到李代数$\mathfrak{g}_1$的满同态. 又设$\mathfrak{h}$，$\mathfrak{h}_1$分别为$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}_1$的Cartan子代数，则

1) $\varphi(\mathfrak{h})$为$\mathfrak{g}_1$的Cartan子代数；

2) $\mathfrak{k}=\varphi^{-1}(\mathfrak{h}_1)=\{x\in\mathfrak{g}\,|\,\varphi(x)\in\mathfrak{h}_1\}$的Cartan子代数为$\mathfrak{g}$的Cartan子代数.

证 由于$\mathfrak{h}$为$\mathfrak{g}$的Cartan子代数. 因而存在正则元$x_0\in\mathfrak{h}$，使得$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)$. 由$\mathfrak{h}$幂零知$\varphi(\mathfrak{h})$为$\mathfrak{g}_1$的幂零子代数，且有

$$\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)=\mathfrak{h}\subseteq\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h}))=\mathfrak{h}+\mathrm{Ker}\varphi.$$

又 $\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h}))$ 与其在 $\mathfrak{g}$ 中的正规化子 $N_{\mathfrak{g}}(\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h})))$ 都是 $\mathrm{ad}x_0$ 的不变子空间，因而 $\mathrm{ad}x_0$ 在商空间

$$N_{\mathfrak{g}}(\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h})))/\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h}))$$

上诱导的线性变换 $A(x_0)$ 是可逆的.

为证 $\varphi(\mathfrak{h})$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数，只要证明

$$N_{\mathfrak{g}_1}(\varphi(\mathfrak{h})) = \varphi(\mathfrak{h}).$$

现设 $x' \in N_{\mathfrak{g}_1}(\varphi(\mathfrak{h}))$. 又 $x \in \mathfrak{g}$ 使 $x' = \varphi(x)$，则 $\forall\, y \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h}))$，有 $\varphi(y) \in \varphi(\mathfrak{h})$，且

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)] = [x',\varphi(y)] \in \varphi(\mathfrak{h}),$$

故 $[x,y] \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h}))$. 因而 $x \in N_{\mathfrak{g}}(\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h})))$，由此得 $[x,x_0] \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h}))$. 这就是说

$$A(x_0)(x + \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h}))) = 0.$$

注意到 $A(x_0)$ 是可逆的，故 $x + \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h})) = 0$，即有 $x \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h}))$，故 $x' = \varphi(x) \in \varphi(\mathfrak{h})$. 由此有 $\varphi(\mathfrak{h}) = N_{\mathfrak{g}_1}(\varphi(\mathfrak{h}))$，$\varphi(\mathfrak{h})$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数. 结论 1) 得证.

现设 $\mathfrak{h}_2$ 为 $\mathfrak{k} = \varphi^{-1}(\mathfrak{h}_1)$ 的Cartan子代数，其中 $\mathfrak{h}_1$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的Cartan子代数，于是 $\varphi(\mathfrak{h}_2)$ 是 $\varphi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{h}_1$ 的 Cartan 子代数. 但 $\mathfrak{h}_1$ 是幂零的，故 $\varphi(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_1$.

设 $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_2)$，则 $\varphi(x) \in N_{\mathfrak{g}_1}(\varphi(\mathfrak{h}_2)) = N_{\mathfrak{g}_1}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_1$，故 $x \in \varphi^{-1}(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{k}$. 因而 $x \in N_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_2$，故

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_2,$$

于是 $\mathfrak{h}_2$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. ▌

定理5.1.3 设 $\mathfrak{g}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的可解李代数，$\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个 Cartan 子代数，则存在 $\sigma \in \mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2. \tag{4}$$

证 对 $\dim\mathfrak{g}$ 作归纳证明. 当 $\dim\mathfrak{g} = 1$ 时，或 $\mathfrak{g}$ 为幂零李代数时，$\mathfrak{g}$ 本身就是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，结论自然成立. 现设 $\mathfrak{g}$ 是可解的，但非幂零的. 设 $\mathfrak{a}$ 为 $\mathfrak{g}$ 中非零的，维数最小的交换理想. 于是

$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{g}$. 又设 φ 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 的自然同态，$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，于是 $\mathfrak{h}_i' = \varphi(\mathfrak{h}_i)$ $(i = 1,2)$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数. 又由于 $\dim\mathfrak{g}_1 < \dim\mathfrak{g}$，由归纳假设可知，存在 $\sigma' \in \mathscr{E}(\mathfrak{g}_1)$ 使得

$$\sigma'(\mathfrak{h}_1') = \mathfrak{h}_2'.$$

但是由引理 5.1.1 知，存在 $\sigma \in \mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得

$$\sigma'\varphi = \varphi \circ \sigma.$$

因而，若令 $\mathfrak{k}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{h}_i')$，则有

$$\varphi(\sigma(\mathfrak{k}_1)) = \sigma'\varphi(\mathfrak{k}_1) = \sigma'(\mathfrak{h}_1') = \mathfrak{h}_2'.$$

因此

$$\sigma(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2,$$

而且 $\sigma(\mathfrak{h}_1), \mathfrak{h}_2$ 均为 $\mathfrak{k}_2$ 的 Cartan 子代数. 以下分两种情形来讨论.

1） 若 $\dim\mathfrak{k}_1 = \dim\mathfrak{k}_2 < \dim\mathfrak{g}$，则由归纳假设存在 $\tau \in \mathscr{E}(\mathfrak{k}_2) = \mathscr{E}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_2) \subseteq \mathscr{E}(\mathfrak{g})$（参看第四章 §4）使得

$$\tau\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2,$$

因而定理成立.

2） 若 $\dim\mathfrak{k}_1 = \dim\mathfrak{k}_2 = \dim\mathfrak{g}$，这时

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}.$$

在 $\mathfrak{h}_2$ 中取正则元 x_0，则 $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0)$. 首先我们证明

$$\mathfrak{a} = \sum_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}x_0),$$

或者，换一种等价的表示

$$\mathrm{ad}x_0|_{\mathfrak{a}} \in GL(\mathfrak{a}).$$

事实上，$\mathfrak{a}$ 是 $\mathrm{ad}x_0$ 的不变子空间，于是

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 \dotplus \mathfrak{a}_*,$$

其中

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_2, \quad \mathfrak{a}_* = \mathfrak{a} \cap \sum_{\lambda \neq 0} \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}x_0).$$

于是 $[\mathfrak{h}_2, \mathfrak{a}_*] \subseteq \mathfrak{a}_*$，$[\mathfrak{h}_2, \mathfrak{a}_0] \subseteq \mathfrak{a}_0$，因而 $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_*$ 均为 $\mathfrak{g}$ 的交换理想. 由 $\dim\mathfrak{a}$ 的最小性知，$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$ 或 $\mathfrak{a}_* = \mathfrak{a}$. 若 $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$，则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_2$，这与 $\mathfrak{g}$ 是

非幂零的矛盾. 故 $\mathfrak{a}_* = \mathfrak{a} = \sum_{\lambda\neq 0}\mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}x_0)$，于是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{a}.$$

同样

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{a}.$$

故对于 $x_0 \in \mathfrak{h}_2$，有 $y \in \mathfrak{h}_1, z \in \mathfrak{a}$ 使得

$$x_0 = y + z.$$

又由 $\mathrm{ad}x_0|_\mathfrak{a}$ 是可逆的，故有 $z' \in \mathfrak{a}$，使得

$$z = \mathrm{ad}x_0(z') = [x_0, z'] = -\mathrm{ad}z'(x_0).$$

由于 $\mathfrak{a}$ 是交换理想，因而

$$(\mathrm{ad}z')^2 u = [z', [z', u]] = 0, \quad \forall\, u \in \mathfrak{g}.$$

于是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}z'} = \mathrm{id}_\mathfrak{g} + \mathrm{ad}z' \in \mathrm{Aut}\mathfrak{g},$$

故

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}z'}(x_0) = x_0 + [z', x_0] = x_0 - z = y.$$

由于 x_0 为正则元，故 y 也为正则元，且

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}y) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}z'}\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}z'}(\mathfrak{h}_2).$$

最后，说明 $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}z'} \in \mathscr{E}(\mathfrak{g})$. 事实上，设

$$z' = \sum_{\lambda\neq 0} z_\lambda, \quad z_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda(\mathrm{ad}x_0) \subseteq \mathfrak{a}.$$

显然，

$$z_\lambda \in \mathscr{N}(\mathfrak{g}), \quad \lambda \neq \mu \text{ 时}, [z_\lambda, z_\mu] = 0,$$

因而

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}z'} = \prod_{\lambda\neq 0} \mathrm{e}^{\mathrm{ad}z_\lambda} \in \mathscr{E}(\mathfrak{g}).$$

这样，我们完成了定理的证明. ▌

注 此定理称为**可解李代数的 Cartan 子代数的共轭定理**.

习　题

1. 设 $\mathfrak{g}$ 为 C 上二维非交换代数. 确定 $\mathfrak{g}$ 的强幂零元集 $\mathscr{N}(\mathfrak{g})$

与 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$，从而决定 $\mathfrak{g}$ 的所有 Cartan 子代数.

§2　极大可解子代数

本节将给出极大可解子代数与抛物子代数的若干性质；特别，将给出复半单李代数的极大可解子代数与抛物子代数的结构. 抛物子代数与极大可解子代数在代数群、李型单群与齐性空间理论中都是很有用处的.

定义 5.2.1　若李代数 $\mathfrak{g}$ 的可解子代数 $\mathfrak{b}$ 不是 $\mathfrak{g}$ 的任何可解子代数的真子代数，则称 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**极大可解子代数**或 **Borel 子代数**. 若 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{p}$ 包含 $\mathfrak{g}$ 的一个 Borel 子代数，则称 $\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**抛物子代数**.

我们可以将 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数都看成 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数.

引理 5.2.1　李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 的正规化子为 $\mathfrak{b}$(称 $\mathfrak{b}$ 是自正规的)，即

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}. \tag{1}$$

证　设 $x \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})$，则由 x 与 $\mathfrak{b}$ 张成的 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{b}_1 = L(x) + \mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，且由 $[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1] \subseteq \mathfrak{b}$ 知 $\mathfrak{b}_1^{(1)}$ 可解，故 $\mathfrak{b}_1$ 可解. 由 $\mathfrak{b}$ 是极大可解的，因而 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$. 故 $x \in \mathfrak{b}$，因而(1)式成立. ▎

可解李代数的 Borel 子代数就是李代数本身，而非可解李代数的 Borel 子代数的问题在一定意义上归结为半单李代数的 Borel 子代数的问题.

定理 5.2.2　设 $\mathfrak{r}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基，而且 $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{g}$. 又 π 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 上的自然同态，则 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的 Borel 子代数在 π 下有一一对应关系.

证　设 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数，故 $\pi(\mathfrak{b})$ 一定是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的可解子代数. 于是存在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}_1 \supseteq \pi(\mathfrak{b})$. 由 $\pi^{-1}(\mathfrak{b}_1)/\mathfrak{r}$ 与 $\mathfrak{b}_1$ 同构，$\mathfrak{r}$ 可解，知 $\pi^{-1}(\mathfrak{b}_1)$ 可解，于是

$$\pi^{-1}(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}.$$

因而

$$\pi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_1.$$

即 $\pi(\mathfrak{b})$ 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的 Borel 子代数,且

$$\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} = \pi^{-1}(\pi(\mathfrak{b})). \tag{2}$$

反之,设 $\mathfrak{b}_1$ 为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的 Borel 子代数. 于是,$\pi^{-1}(\mathfrak{b}_1)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的可解子代数,于是存在 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 使得

$$\mathfrak{b} \supseteq \pi^{-1}(\mathfrak{b}_1) \supseteq \mathfrak{r},$$

因而

$$\pi(\mathfrak{b}) \supseteq \mathfrak{b}_1.$$

又 $\pi(\mathfrak{b})$ 是可解的,故 $\pi(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_1$. 因此

$$\mathfrak{b} = \pi^{-1}(\pi(\mathfrak{b})) = \pi^{-1}(\mathfrak{b}_1),$$

即 $\pi^{-1}(\mathfrak{b}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数.

故 π 是 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数集到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的 Borel 子代数集的满映射,而且从(2)式知这个映射也是一一的,于是定理成立. ▌

以下我们讨论复半单李代数的 Borel 子代数与抛物子代数的一些性质.

定理 5.2.3 设 Δ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系. 在 $\mathfrak{h}_R$ 中取好一种次序后,Δ_+ 为正根系,则

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Borel 子代数,称为 $\mathfrak{g}$ 的**标准 Borel 子代数**.

又若 Δ_+' 是关于 $\mathfrak{h}_R$ 的另一次序的正根系,

$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta_+'} \mathfrak{g}_\alpha$$

为对应的标准 Borel 子代数,则存在 $\theta \in \mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得

$$\theta(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}'. \tag{4}$$

证 因为

$$[\mathfrak{b},\mathfrak{b}] = \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha,$$

而$\sum_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha$是幂零的，故$\mathfrak{b}$是可解的. 设$\mathfrak{b}_1\supset\mathfrak{b}$，而$\mathfrak{b}_1\neq\mathfrak{b}$. 注意到$\mathfrak{b}_1$在$\mathrm{ad}\mathfrak{h}$下不变，故

$$\mathfrak{b}_1=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta_1}\mathfrak{g}_\alpha,$$

其中Δ_1满足

$$\Delta\supseteq\Delta_1\supset\Delta_+.$$

因而有$\alpha\in\Delta_-$使$-\alpha\in\Delta_1$. 因$\mathfrak{b}_1$包含3维单李代数$\boldsymbol{C}\alpha+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}$，故$\mathfrak{b}_1$不是可解的，于是$\mathfrak{b}$为$\mathfrak{g}$的Borel子代数.

设W为$\mathfrak{g}$关于$\mathfrak{h}$的Weyl群. 由定理4.2.3知$\exists\, w\in W$使得$w(\Delta_+)=\Delta'_+$. 由定理4.4.1知存在$\theta\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$使得$\theta|_{\mathfrak{h}_R}=w$，且$\theta(\mathfrak{g}_\alpha)=\mathfrak{g}_{\theta(\alpha)}$，于是

$$\theta(\mathfrak{b})=\mathfrak{b}',$$

即(4)式成立. ▌

这个定理说明对同一个Cartan子代数$\mathfrak{h}$的两个标准Borel子代数在$\mathscr{E}(\mathfrak{g})$下共轭. 下面讨论复半单李代数$\mathfrak{g}$的一般Borel代数的性质.

定理 5.2.4 设$\mathfrak{b}$是复半单李代数$\mathfrak{g}$的一个Borel子代数，则下面结论成立.

1) 设$x\in\mathfrak{b}$，x的Jordan分解为$x=x_s+x_n$，则$x_s,x_n\in\mathfrak{b}$；

2) $\mathfrak{b}$中一定有非零的半单元与非零的幂零元；

3) 存在$\mathfrak{g}$的标准Borel子代数$\mathfrak{b}_0$使得

$$\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}_0\neq\{0\};\tag{5}$$

4) 若$\mathfrak{b},\mathfrak{b}_0$均为标准Borel子代数，则

$$\dim(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}_0)\geqslant\mathrm{rank}\mathfrak{g}.\tag{6}$$

证 1) 设$x\in\mathfrak{b}$. $x=x_s+x_n$为x的Jordan分解. 由定理2.2.1知$\mathrm{ad}x_s,\mathrm{ad}x_n$是$\mathrm{ad}x$的多项式. 因而

$$\mathrm{ad}x_s(\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{b},\quad \mathrm{ad}x_n(\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{b}.$$

由引理5.2.1知

$$x_s\in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})=\mathfrak{b},\quad x_n\in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b})=\mathfrak{b}.$$

故结论 1) 成立.

2) 若 $\mathfrak{b}$ 中无非零的半单元. $x \in \mathfrak{b}$，设其 Jordan 分解为 $x = x_s + x_n$. 由结论 1) 知 $x_s, x_n \in \mathfrak{b}$. 因而 $x_s = 0$，故 $x = x_n$ 是幂零的. 故由定理 2.3.1 的推论知 $\mathfrak{b}$ 是幂零的. 又由引理 2.5.1 知 $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$，故 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 但由定理 3.2.1 知复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数中任何元素都是半单的. 这就产生了矛盾. 因此，$\mathfrak{b}$ 中一定有非零的半单元.

若 $\mathfrak{b}$ 中无非零的幂零元，则由上面的讨论可知 $\mathfrak{b}$ 中任何元素都是半单的. 由 Engel 定理与 Lie 定理知，$\forall\, x \in \mathfrak{b}^{(1)}$，$\mathrm{ad}x|_{\mathfrak{b}}$ 是幂零的. 但 $\mathrm{ad}x$ 又是半单的，故 $(\mathrm{ad}x)^2\mathfrak{b} = 0$. 再由 $\mathrm{ad}x$ 的半单性知 $\mathrm{ad}x(\mathfrak{b}) = 0$，因而 $\mathfrak{b}$ 是交换李代数. 又 $\mathfrak{b}$ 是极大可解的，自然是极大交换的. 由定理 3.2.1 知 $\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 但 Cartan 子代数不是极大可解的，故 $\mathfrak{b}$ 中一定有非零的幂零元.

3) 设 $\mathfrak{h}_1$ 为 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 中极大交换，且任何元素均为半单元素的子代数. 由结论 1) 与 2) 知 $\mathfrak{h}_1 \neq \{0\}$，因而存在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{h}_1$. 根据定理 5.2.3 可以构造一个标准 Borel 子代数 $\mathfrak{b}_0 \supseteq \mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{h}_1$，于是

$$\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}_0 \supseteq \mathfrak{h}_1 \neq \{0\},$$

即结论 3) 成立.

4) 由定理 5.2.3 知

$$\dim\mathfrak{b} = \dim\mathfrak{b}_0 = \mathrm{rank}\,\mathfrak{g} + \frac{1}{2}|\Delta|,$$

于是

$$\begin{aligned}\dim(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}_0) &= \dim\mathfrak{b} + \dim\mathfrak{b}_0 - \dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_0)\\ &= \mathrm{rank}\,\mathfrak{g} + \dim\mathfrak{g} - \dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}_0)\\ &\geqslant \mathrm{rank}\,\mathfrak{g}.\end{aligned}$$

由此知(6)式成立. ▌

定理 5.2.5 设 Δ, Δ_+ 与 Π 分别为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{g}$ 的根系，正根系与素根系，$\mathfrak{b}$ 为 $\mathfrak{g}$ 对于 Δ_+ 的标准

Borel 子代数. 若 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数 $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$, 则有 $\Pi_0 \subseteq \Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$使得

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_+ \cup [\Pi_0]} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{7}$$

其中

$$[\Pi_0] = \left\{\alpha = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i \in \Delta \,|\, \alpha_i \overline{\in} \Pi_0, k_i = 0\right\}. \tag{8}$$

证 由于$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$,故$\mathfrak{p}$对$\mathfrak{h}$有分解

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_1} \mathfrak{g}_\alpha,$$

而且 $$\Delta_+ \subseteq \Delta_1 \subseteq \Delta.$$

令 $$\Pi_0 = -(\Delta_1 \cap (-\Pi)).$$

下面证明

$$[\Pi_0] \cap \Delta_- = \Delta_1 \cap \Delta_-. \tag{9}$$

由 Π_0 的定义知 $-\Pi_0 \subseteq \Delta_1$. 由于$\mathfrak{p}$是子代数,故知$[\Pi_0] \cap \Delta_- \subseteq \Delta_1 \cap \Delta_-$. 现设 $\alpha \in \Delta_1 \cap \Delta_-$,于是

$$\alpha = -\sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i, \quad k_i \in \mathbf{Z}_+.$$

对 $\mathrm{ht}(-\alpha) = \sum_{i=1}^{n} k_i$ 作归纳法证明 $\alpha \in [\Pi_0] \cap \Delta_-$.

显然,当 $\mathrm{ht}(-\alpha) = 1$ 时,$\alpha \in (-\Pi_0) \subseteq [\Pi_0] \cap \Delta_-$. 假设 $\mathrm{ht}(-\alpha) = k-1$ 时结论已经成立,当 $\mathrm{ht}(-\alpha) = k$ 时,故有 $\alpha_{i_0} \in \Pi, \beta \in \Delta_+$ 使得

$$-\alpha = \alpha_{i_0} + \beta, \quad k_{i_0} \neq 0.$$

于是由 $\alpha \in \Delta_1, \alpha_{i_0}, \beta \in \Delta_1$,知

$$-\beta = \alpha + \alpha_{i_0} \in \Delta_1 \cap \Delta_-,$$

$\mathrm{ht}\beta = k-1$,且

$$-\beta = -\sum_{i \neq i_0} k_i \alpha_i - (k_{i_0} - 1)\alpha_{i_0},$$

$$-\alpha_{i_0} = \alpha + \beta \in \Delta_1 \cap \Delta_-.$$

由归纳假设知当 $k_i \neq 0$ 时,$\alpha_i \in \Pi_0$,即 $\alpha \in [\Pi_0] \cap \Delta_-$. 因而(9)式成立. 由(9)式即得

$$\Delta_1 = [\Pi_0] \cup \Delta_+,$$

即定理成立. ▌

通常将定理 5.2.5 中的抛物子代数记为 $\mathfrak{p}_{[\Pi_0]}$. 容易证明,对 Π 的任何子集 Π_0,可由(7),(8) 得到 $\mathfrak{g}$ 的一个抛物子代数. 若 $\Pi_0 = \varnothing$,则 $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_{[\Pi_0]}$. 若 $\Pi_0 = \Pi$,则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{[\Pi_0]}$. 故我们不妨将 $\mathfrak{g}$ 本身与 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数均视为 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数.

习　　题

1. 设 Π_0 为素根系 Π 的子集. 试证

$$\mathfrak{p}_{[\Pi_0]} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_+ \cup [\Pi_0]} \mathfrak{g}_\alpha$$

是 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数.

2. 证明 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数 $\mathfrak{p}_{[\Pi_0]}$ 是自正规的,即

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p}_{[\Pi_0]}) = \mathfrak{p}_{[\Pi_0]}.$$

3. 若 $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2$ 都是包含标准 Borel 子代数的抛物子代数,试证

$$\dim(\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2) \geqslant \operatorname{rank} \mathfrak{g}.$$

4. 设 $\mathfrak{g}$ 为复李代数,$\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基. 试问 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的抛物子代数之间有何关系?

§3　共轭性定理

本节将证明复李代数的 Borel 子代数是共轭的,进而证明复李代数的 Cartan 子代数是共轭的. 本节的结果与基域的性质有关,例如实李代数的 Cartan 子代数不一定是共轭的. 这点请读者务必注意.

引理 5.3.1　设 Δ,Δ_+ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系,正根系,(x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型,$\mathfrak{g}$ 的标准 Borel 子代数为

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{1}$$

则 $\mathfrak{b}$ 中所有幂零元的集合为

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{2}$$

而且

$$\mathfrak{n}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \mid (x, \mathfrak{n}) = 0\} = \mathfrak{b}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{b}^\perp = \{x \in \mathfrak{g} \mid (x, \mathfrak{b}) = 0\} = \mathfrak{n}. \tag{4}$$

证 显然，$\mathfrak{n}$ 中的元素都是幂零的. 反之，设 x 在 $\mathfrak{b}$ 中，但不在 $\mathfrak{n}$ 中，则

$$x = h + \sum_{\alpha \in \Delta_+} k_\alpha e_\alpha,$$

其中 $h \in \mathfrak{h}, h \neq 0; e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$. 取 $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$，使得 $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. 由 $h \neq 0$，故 $\exists\ \beta \in \Delta_+$，使 $(\beta, h) \neq 0$，故有

$$\mathrm{ad}x(e_\beta) = (h, \beta)e_\beta + \sum_{\alpha > \beta} k'_\alpha e_\alpha,$$

由此立即可得

$$(\mathrm{ad}x)^m e_\beta = (h, \beta)^m e_\beta + \sum_{\alpha > \beta} k''_\alpha e_\alpha \neq 0, \quad \forall\, m \in N,$$

因而 $\mathrm{ad}x$ 不是幂零的. 于是 $\mathfrak{n}$ 为所有幂零元的集合.

设 $x = h + \sum_{\alpha \in \Delta_+} k_\alpha e_\alpha + \sum_{\alpha \in \Delta_+} k'_\alpha e_{-\alpha} \in \mathfrak{n}^\perp$，则

$$(x, e_{\alpha_0}) = 0, \quad \forall\, \alpha_0 \in \Delta_+$$

成立当且仅当

$$k'_{\alpha_0} = 0, \quad \forall\, \alpha_0 \in \Delta_+,$$

即当且仅当

$$x = h + \sum_{\alpha \in \Delta_+} k_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{b}.$$

因而(3) 式与(4) 式成立. ∎

推论 复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的标准 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$ 的所有幂零元的集合为 $\mathfrak{n} = \mathfrak{b}^{(1)}$ 是 $\mathfrak{b}$ 的理想.

这是(1)式与(2)式的必然结论. ▌

引理 5.3.2 设复半单李代数$\mathfrak{g}$对其Cartan子代数$\mathfrak{h}$的根系，正根系与标准 Borel 子代数为Δ,Δ_+与$\mathfrak{b}_1$，即

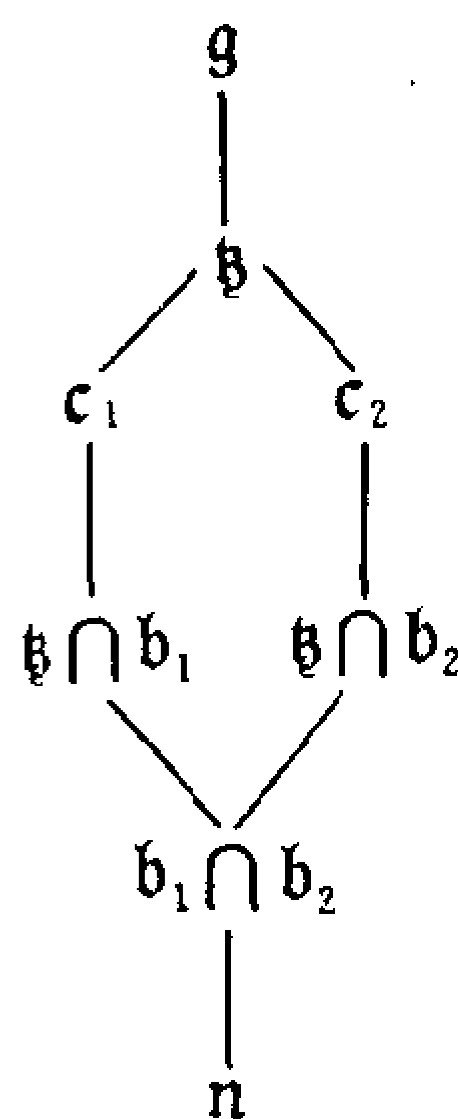
$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

又设$\mathfrak{n}(\mathfrak{b}_1)$为$\mathfrak{b}_1$的所有幂零元的集合，$\mathfrak{b}_2$为$\mathfrak{g}$的Borel子代数，且$\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \neq \{0\}$，以$\mathfrak{n}$表示$\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$的所有幂零元的集合.

1) 若$\mathfrak{n}\neq\{0\}$，则$\mathfrak{p} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$为$\mathfrak{g}$的真子代数，并有$\mathfrak{p}$的Borel子代数$\mathfrak{c}_i$满足

$$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{c}_i \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g} \quad (i = 1,2),$$

如右面的示意图.



2) 若$\mathfrak{n} = \{0\}$，则$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$是$\mathfrak{g}$的交换子代数，且有$\sigma \in \mathscr{E}(\mathfrak{b}_1)$，使得

$$\sigma(\mathfrak{h}_1) \subseteq \mathfrak{h}.$$

证 显然，$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\mathfrak{b}_1) \cap \mathfrak{b}_2$，从引理 5.3.1 知$\mathfrak{n}$为$\mathfrak{g}$的幂零子代数，且

$$[\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{n},$$

故$\mathfrak{n}$为$\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$的理想，即

$$\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subseteq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{p}.$$

1) 若$\mathfrak{n}\neq\{0\}$，注意到$\mathfrak{n}$是幂零的，$\mathfrak{g}$是半单的，故$\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$. $\mathfrak{p}$为$\mathfrak{g}$的真子代数. 显然，$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}_i$. 由于$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}_i$是可解的，于是存在$\mathfrak{p}$的极大可解子代数，即 Borel 子代数$\mathfrak{c}_i \supseteq \mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_i$. 下面证明$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_i \neq \mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$. 任取$x \in \mathfrak{n}$，由于$\mathfrak{b}_i, \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$都是$\mathrm{ad}x$的不变子空间，于是$\mathrm{ad}x$在$\mathfrak{b}_i/(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)$上诱导了一个线性变换$X_i$. 显然$X_i$是幂零的. 于是由 Engel 定理知，有$y_i \in \mathfrak{b}_i - (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$，使得$[y_i, x] \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$，而$[y_i, x] \in \mathfrak{b}_i^{(1)}$，故$[y_i, x]$是幂零的，因而$[y_i, x] \in \mathfrak{n}$. 于是

$$y_i \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{b}_i, \text{但 } y_i \overline{\in} \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2.$$

2) 若$\mathfrak{n} = \{0\}$. 设$x \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$，$x = x_s + x_n$为$x$的 Jordan 分

解. 故由定理 5.2.4 知 $x_n, x_s \in \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2, x_n \in \mathfrak{n} = \{0\}$. 故 $x = x_s$, 即 $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ 中任何元素都是半单的. 再由定理 5.2.4 的证明知 $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{h}_1$ 为交换子代数,而且

$$\mathfrak{b}_1^{(1)} \cap \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{n}(\mathfrak{b}_1) \cap \mathfrak{h}_1 = \{0\}.$$

显然

$$C_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1) \subseteq N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1).$$

反之,设 $b \in N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1), t \in \mathfrak{h}_1$, 则有 $[b,t] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{b}_1^{(1)} = \{0\}$, 故 $[b,t] = 0$, 因而

$$N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1) = C_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1).$$

若 $\mathfrak{h}_2$ 为 $N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1)$的 Cartan 子代数,由上式可知 $\mathfrak{h}_2 \supseteq \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ 为幂零子代数. 若 $x \in N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_2)$, 设 $t \in \mathfrak{h}_1$, 于是 $[x,t] \in \mathfrak{h}_2 \subseteq N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1) = C_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1)$. 因此 $[t,[t,x]] = 0$, 即 $(\mathrm{ad}t)^2 x = 0$. 由于 $\mathrm{ad}t$ 是半单的,故 $[t,x] = 0$, 因而 $x \in C_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1) \cap N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_2)$, 故

$$N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_2) = N_{C_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1)}(\mathfrak{h}_2) = N_{N_{\mathfrak{b}_1}(\mathfrak{h}_1)}(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}_2.$$

由此可知 $\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{b}_1$ 的 Cartan 子代数. 由定理 5.1.3 可知存在 $\sigma \in \mathscr{E}(\mathfrak{b}_1)$ 使得 $\sigma(\mathfrak{h}_2) = \mathfrak{h}$, 故 $\sigma(\mathfrak{h}_1) \subseteq \mathfrak{h}$. ▎

定理 5.3.3 设 $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ 为复李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个 Borel 子代数,则存在 $\sigma \in \mathscr{E}(\mathfrak{g})$, 使得

$$\sigma(\mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_2, \tag{5}$$

即 $\mathfrak{b}_1$ 与 $\mathfrak{b}_2$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是共轭的.

证 令 $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ 在 $\mathfrak{b}_1$ 中的余维数为

$$\mathrm{codim}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = \dim \mathfrak{b}_1 - \dim(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2).$$

我们对 $\dim \mathfrak{g}$ 与 $\mathrm{codim}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$作归纳证明.

显然, $\dim \mathfrak{g} = 1$, 或 $\mathfrak{g}$ 可解时定理成立.

又当 $\mathrm{codim}(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2) = 0$ 时,则 $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1$, 即 $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_2$. 而 $\mathfrak{b}_1$ 与 $\mathfrak{b}_2$ 均为 $\mathfrak{g}$ 的极大可解子代数,于是 $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$. 故定理仍成立.

设 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基,不妨假定 $\mathfrak{r} \neq \mathfrak{g}$. 如果 $\mathfrak{r} \neq \{0\}$, 设 π 为 $\mathfrak{g}$ 到$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的自然同态. 由定理 5.2.2 知 $\pi(\mathfrak{b}_1), \pi(\mathfrak{b}_2)$为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的 Borel 子代数.

由于

$$\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{r}<\dim\mathfrak{g},$$

因而由归纳假设知有 $\theta'\in\mathscr{E}(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})$,使得

$$\theta'(\pi(\mathfrak{b}_1))=\pi(\mathfrak{b}_2).$$

由定理 5.2.2 知

$$\mathfrak{b}_i=\pi^{-1}(\pi(\mathfrak{b}_i)).$$

又由引理 5.1.1 知有 $\theta\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$使得

$$\pi\theta=\theta'\pi,$$

因而

$$\mathfrak{b}_2=\pi^{-1}(\theta'\pi(\mathfrak{b}_1))=\pi^{-1}(\pi\theta(\mathfrak{b}_1))=\theta(\mathfrak{b}_1).$$

故 $\mathfrak{b}_1$ 与 $\mathfrak{b}_2$ 在 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$下共轭.

下面讨论 $\mathfrak{r}=\{0\}$,即 $\mathfrak{g}$ 半单的情况.

首先,假定 $\mathfrak{b}_1$ 是关于 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 及其正根系 Δ_+ 的标准 Borel 子代数,且 $\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2\neq\{0\}$. 记 $\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$ 中幂零元的集合为 $\mathfrak{n}$.

1) 若 $\mathfrak{n}\neq\{0\}$. 由引理 5.3.2 知有

$$\mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2\subset\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_i\subseteq\mathfrak{c}_i\subseteq\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g},\quad i=1,2,$$

其中 $\mathfrak{p}=N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{n})$,$\mathfrak{c}_i$ 为 $\mathfrak{p}$ 的 Borel 子代数. 由于

$$\dim\mathfrak{p}<\dim\mathfrak{g},$$

因而有 $\sigma\in\mathscr{E}(\mathfrak{p})=\mathscr{E}(\mathfrak{g},\mathfrak{p})\subseteq\mathscr{E}(\mathfrak{g})$使得

$$\sigma(\mathfrak{c}_2)=\mathfrak{c}_1.$$

显然,$\sigma(\mathfrak{b}_2)$也是 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数,而且

$$\mathfrak{c}_1=\sigma(\mathfrak{c}_2)\subseteq\sigma(\mathfrak{b}_2).$$

因而

$$\dim(\mathfrak{c}_1\cap\sigma(\mathfrak{b}_2))=\dim\mathfrak{c}_1\geqslant\dim(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_1)>\dim(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2).$$

换言之,

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\sigma(\mathfrak{b}_2))<\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2).$$

由归纳假设知,有 $\theta\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$使

$$\theta\sigma(\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_1,$$

即 $\mathfrak{b}_1$ 与 $\mathfrak{b}_2$ 在 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 下共轭.

2) $\mathfrak{n}=\{0\}$. 由引理 5.3.2 知 $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$ 是交换子代数，且有 $\sigma\in\mathscr{E}(\mathfrak{b}_1)\subseteq\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得

$$\sigma(\mathfrak{h}_1)\subseteq\mathfrak{h}.$$

显然 $\sigma(\mathfrak{b}_2)$ 与 $\mathfrak{b}_2$ 共轭，且 $\mathfrak{b}_1\cap\sigma(\mathfrak{b}_2)=\sigma(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)=\sigma(\mathfrak{h}_1)\subseteq\mathfrak{h}$. 故若以 $\sigma(\mathfrak{b}_2)$ 代替 $\mathfrak{b}_2$，则可假设 $\mathfrak{h}_1\subseteq\mathfrak{h}$. 下面分成三种情形讨论.

(i) $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}$. 由于 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{b}_2$ 以及 $\mathfrak{b}_2\neq\mathfrak{b}_1$，则有 $\alpha\in\Delta_+$ 使得 $\mathfrak{g}_{-\alpha}\subseteq\mathfrak{b}_2$. 因而由定理 4.4.1 知有 $\theta_\alpha\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\theta_\alpha(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$，$\theta_\alpha(\mathfrak{g}_{-\alpha})=\mathfrak{g}_\alpha$，从而

$$\mathfrak{b}_1\cap\theta_\alpha(\mathfrak{b}_2)\supseteq\mathfrak{h}+\mathfrak{g}_\alpha.$$

于是

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\theta_\alpha(\mathfrak{b}_2))<\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2).$$

由归纳假设知，存在 $\tau(\mathfrak{g})$，使 $\tau\theta_\alpha(\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_1$，即此时定理成立.

(ii) $\mathfrak{h}_1\neq\mathfrak{h}$，$[\mathfrak{b}_2,\mathfrak{h}_1]=0$，即 $\mathfrak{b}_2\subset C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$. 注意到 $\dim C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})<\dim\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}\subseteq C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$，取 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ 的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}_3\supseteq\mathfrak{h}$，由于 $\mathfrak{b}_2$ 也是 $C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1)$ 的 Borel 子代数，故有 $\tau\in\mathscr{E}(C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_1))\subseteq\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\tau(\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_3$. 于是由 $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_3$，知

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_3)<\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2),$$

因而有 $\theta\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\theta(\mathfrak{b}_3)=\mathfrak{b}_1$，即 $\theta\tau(\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_1$. 故此时定理也成立.

(iii) $\mathfrak{h}_1\neq\mathfrak{h}$，但 $[\mathfrak{b}_2,\mathfrak{h}_1]\neq0$. 于是有 $x\in\mathfrak{b}_2$，$t\in\mathfrak{h}_1$，使得 $[t,x]=ax$，其中 $a\in\boldsymbol{Q}$，且 $a>0$. 令

$$\Delta_1=\{\alpha\in\Delta\mid\alpha(t)\in\boldsymbol{Q},\alpha(t)>0\},$$

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta_1}\mathfrak{g}_\alpha.$$

显然，$\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解子代数. 取 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}_3\supseteq\mathfrak{s}$，于是

$$\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_3\supseteq\mathfrak{h},$$

即

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_3)<\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2).$$

故有 $\theta\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$，使得 $\theta(\mathfrak{b}_3)=\mathfrak{b}_1$，而且 $\mathfrak{b}_3$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的标准 Borel 子代数

(对 $\theta(\mathfrak{h})$ 与 $\theta(\Delta_+)$),且

$$\mathfrak{b}_3\cap\mathfrak{b}_2\supseteq\mathfrak{h}_1+\boldsymbol{R}x\supset\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2,$$

即有

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_3\cap\mathfrak{b}_2)<\operatorname{codim}(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2).$$

(这里,右边是 $\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$ 在 $\mathfrak{b}_1$ 中的余维数,左边是 $\mathfrak{b}_3\cap\mathfrak{b}_2$ 在 $\mathfrak{b}_3$ 中的余维数.)于是有 $\tau\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$,使得 $\tau(\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_3$,故 $\theta\tau(\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_1$,即定理亦成立.

其次,假定 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 都是标准 Borel 子代数,由定理 5.2.4 的结论 4)知 $\dim(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)>0$,即 $\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2\neq\{0\}$. 故由上面讨论知 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 在 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 下共轭.

最后,若 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 为 $\mathfrak{g}$ 的任意两个 Borel 子代数,由定理 5.2.4 的结论 3)知,存在 $\mathfrak{g}$ 的标准 Borel 子代数 $\mathfrak{b}_{i_0}$ 使得 $\mathfrak{b}_i\cap\mathfrak{b}_{i_0}\neq\{0\}$,$i=1,2$. 因而由 $\mathfrak{b}_i$ 与 $\mathfrak{b}_{i_0}$ 在 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 下共轭,$\mathfrak{b}_{1_0}$ 与 $\mathfrak{b}_{2_0}$ 在 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 下共轭知 $\mathfrak{b}_1$ 与 $\mathfrak{b}_2$ 在 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 下共轭.

总之,$\mathfrak{r}=\{0\}$ 时,$\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数在 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 下共轭.

综上所述,定理得证. ▌

推论 1 设 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 都是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数,则

$$\dim(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)\geqslant\operatorname{rank}\mathfrak{g}. \tag{6}$$

推论 2 设 $\mathfrak{b}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数,$\mathfrak{n}(\mathfrak{b})$ 为 $\mathfrak{b}$ 中所有幂零元的集合,则

$$\mathfrak{b}^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}\mid(x,\mathfrak{g})=0\}=\mathfrak{n}(\mathfrak{b}), \tag{7}$$

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{b})^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}\mid(x,\mathfrak{n}(\mathfrak{b})=0\}=\mathfrak{b}. \tag{8}$$

由于定理 5.3.3,这两个推论中的 Borel 子代数 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 与 $\mathfrak{b}$ 都是标准 Borel 子代数,故由定理 5.2.4 的结论 4)知(6)式成立. 而由引理 5.3.1 知(7),(8)二式成立.

下面我们证明复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的任意两个 Borel 子代数一定包含有公共的 Cartan 子代数. 这个事实在微分几何中是很有用的. 为此,我们先证明两个引理.

引理 5.3.4 以(x,y)表示复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型,$\mathfrak{a}_1$,

$\mathfrak{a}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个子空间,令

$$\mathfrak{a}_i^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}\,|\,(x,\mathfrak{a}_i)=0\},\quad i=1,2.$$

则

$$(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)^{\perp}=\mathfrak{a}_1^{\perp}\cap\mathfrak{a}_2^{\perp},\tag{9}$$

$$\mathfrak{a}_1^{\perp}+\mathfrak{a}_2^{\perp}=(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^{\perp}.\tag{10}$$

证 (9)式是很容易证明的,而且易知

$$\mathfrak{a}_1^{\perp}+\mathfrak{a}_2^{\perp}\subseteq(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^{\perp}.$$

另一方面,又有

$$\begin{aligned}\dim(\mathfrak{a}_1^{\perp}+\mathfrak{a}_2^{\perp})&=\dim\mathfrak{a}_1^{\perp}+\dim\mathfrak{a}_2^{\perp}-\dim(\mathfrak{a}_1^{\perp}\cap\mathfrak{a}_2^{\perp})\\&=2\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{a}_1-\dim\mathfrak{a}_2-\dim(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)^{\perp}\\&=\dim(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^{\perp},\end{aligned}$$

故(10)式也成立. ▌

引理 5.3.5 设 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个 Borel 子代数,$\mathfrak{n}_1,\mathfrak{n}_2$ 分别为 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 的幂零元素的集合,则

$$\mathfrak{b}_i=\mathfrak{n}_i+(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2),\quad i=1,2.$$

证 显然,

$$\mathfrak{n}_1+(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)\subseteq\mathfrak{b}_1\cap(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{b}_2).$$

又若 $x\in\mathfrak{b}_1\cap(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{b}_2)$,即有 $a\in\mathfrak{n}_1,b\in\mathfrak{b}_2$ 使得 $x=a+b$. 于是 $b=x-a\in\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$,就有 $x\in\mathfrak{n}_1+(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)$,因而

$$\mathfrak{n}_1+(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_1\cap(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{b}_2).$$

又显然有

$$\mathfrak{n}_1\cap\mathfrak{n}_2=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{n}_2.$$

由定理 5.3.3 的推论 2 及引理 5.3.4 有

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_1=\mathfrak{n}_1^{\perp}&=(\mathfrak{n}_1+(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{n}_2))^{\perp}=\mathfrak{n}_1^{\perp}\cap(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{n}_2)^{\perp}\\&=\mathfrak{b}_1\cap(\mathfrak{b}_1^{\perp}+\mathfrak{n}_2^{\perp})=\mathfrak{b}_1\cap(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{b}_2)\\&=\mathfrak{n}_1+(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2).\end{aligned}$$

同样可证

$$\mathfrak{b}_2=\mathfrak{n}_2+(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2).\quad ▌$$

定理 5.3.6 设 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个 Borel 子代数,则 $\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$ 中一定包含 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

证 令 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$,$\mathfrak{n}_1$ 为 $\mathfrak{b}_1$ 中所有幂零元的集合,则由引理 5.3.5 知

$$\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}+\mathfrak{n}_1.$$

设 $\mathfrak{h}_1$ 为 $\mathfrak{a}$ 中元素皆半单的极大可换子代数,由于$[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{n}_1]\subseteq\mathfrak{n}_1$,$\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{n}_1=\{0\}$,故有 $\mathfrak{a}$ 的子空间 $\mathfrak{a}_1$ 满足下面三个条件:

1) $[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{a}_1]\subseteq\mathfrak{a}_1$;

2) $\mathfrak{a}_1\supseteq\mathfrak{h}_1$;

3) $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\dotplus\mathfrak{a}\cap\mathfrak{n}_1$.

注意到$[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{a}_1]\subseteq\mathfrak{a}\cap\mathfrak{n}_1$,故由 3)知$[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{a}_1]=\{0\}$. 设 $x\in\mathfrak{a}_1$,x 的 Jordan 分解为 $x=x_s+x_n$. 于是由定理 5.2.4 知 $x_s,x_n\in\mathfrak{a}$,且 $x_n\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{n}_1$. 又 $\forall h\in\mathfrak{h}_1$,有$[x,h]=0$,即 $\mathrm{ad}x(h)=0$. 而 $\mathrm{ad}x_s$ 是 $\mathrm{ad}x$ 的常数项为零的多项式(参看第二章 § 2 的习题 1),故 $\mathrm{ad}x_s(h)=0$. 由 $\mathfrak{h}_1$ 的定义知 $x_s\in\mathfrak{h}_1$. 再由 $\mathfrak{a}_1$ 满足的性质 3)知 $x_n=0$. 因而 $\mathfrak{a}_1$ 中所有元素都是半单的. 故 $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{h}_1$,即有

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{h}_1\dotplus\mathfrak{a}\cap\mathfrak{n}_1.$$

再由引理 5.3.5 知

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_1&=\mathfrak{n}_1+(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{a}\\&=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{n}_1+\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}_1\dotplus\mathfrak{n}_1,\end{aligned}$$

于是

$$\dim\mathfrak{h}_1=\mathrm{rank}\mathfrak{g}.$$

故 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 中极大交换子代数,而且其中元素都是半单的,故 $\mathfrak{h}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. ▌

最后,我们证明在复半单李代数分类理论中关键之一的 Cartan 子代数的共轭性定理.

定理 5.3.7 设 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 是复李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个 Cartan 子代数,则 $\mathfrak{h}_1$ 与 $\mathfrak{h}_2$ 在 $\mathscr{E}(\mathfrak{g})$下共轭,即有 $\theta\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$使得 $\theta(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$.

证 设 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 分别为包含 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 的 $\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数,于是 $\mathfrak{h}_1$,

$\mathfrak{h}_2$ 分别为 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 的 Cartan 子代数. 由定理 5.3.3 知有 $\tau\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\tau(\mathfrak{b}_1)=\mathfrak{b}_2$,因此 $\tau(\mathfrak{h}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的,也是 $\mathfrak{b}_2$ 的 Cartan 子代数. 由定理 5.1.3 可知有 $\sigma\in\mathscr{E}(\mathfrak{b}_2)\subseteq\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\sigma(\tau(\mathfrak{h}_1))=\mathfrak{h}_2$,于是 $\theta=\sigma\tau\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$,使得 $\theta(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$. ▌

习　　题

1. 设 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个 Borel 子代数,$\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$ 的幂零元素的集合. 试证下述条件等价:

1) $\mathfrak{n}=\{0\}$;

2) $\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数;

3) $\dim(\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)=\operatorname{rank}\mathfrak{g}$.

2. 设 $\mathfrak{p}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数. 试证存在 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$,使得

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_{(\Pi_0)}=\mathfrak{h}+\sum_{\Delta_+\cup[\Pi_0]}\mathfrak{g}_\alpha,$$

其中 Δ_+ 为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系 Δ 在某次序下的正根系,Π_0 为对应素根系 Π 的子集.

3. 设 $\mathfrak{p}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数. 试证

1) $C(\mathfrak{p})=\{0\}$;

2) $\operatorname{Der}\mathfrak{p}=\operatorname{ad}\mathfrak{p}$,

即 $\mathfrak{p}$ 为完备李代数.

4. 设 $\mathfrak{p}$ 为复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数. 试证 $\mathfrak{p}$ 不能分解为两个非平凡理想的直和.

§4　分类定理

由于复半单李代数可分解为单李代数的直和,而且这种分解除这些理想的次序外是唯一的,因而复半单李代数的分类问题归结为单李代数的分类问题. 本节将解决这一问题. 我们仍以 (x,y)

表示李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型.

定理 5.4.1 复单李代数 $\mathfrak{g}$ 对应唯一的 Dynkin 图.

证 设 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 为 $\mathfrak{g}$ 的两个 Cartan 子代数，Δ_1,Δ_2 分别为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 的根系. Π_1,Π_2 分别为 Δ_1,Δ_2 的素根系. 由定理 5.3.7 知有 $\theta_1\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\theta_1(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$. 由于 $(\theta_1(x),\theta_1(y))=(x,y)$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$; $\theta_1([x,y])=[\theta_1(x),\theta_1(y)]$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$. 因而，$\theta_1(\Delta_1)=\Delta_2$，故 $\theta_1(\Pi_1)$ 为 $\mathfrak{h}_{2_R}$ 在某种次序下的素根系. 设 W 为由 $\mathfrak{h}_2$ 确定的 Weyl 群，由定理 4.2.3 知，有 $w\in W$ 使得 $w(\theta_1(\Pi_1))=\Pi_2$. 再由定理 4.4.1 知有 $\theta_2\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\theta_2|_{\mathfrak{h}_{2_R}}=w$，因而 $\theta=\theta_2\theta_1\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使得 $\theta(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$, $\theta(\Pi_1)=\Pi_2$. 故 Π_1,Π_2 所确定的 Dynkin 图相同. ▌

推论 设 W_1,W_2 分别为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 的 Weyl 群，则 W_1 与 W_2 同构.

事实上，由于有 $\theta\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})$ 使 $\theta(\mathfrak{h}_1)=\mathfrak{h}_2$ 以及 $\theta(\Delta_1)=\Delta_2$, $(\theta(x),\theta(y))=(x,y)$ 知 W_1 与 W_2 同构. ▌

为证明有相同 Dynkin 图的复半单李代数同构，我们需要对复半单李代数的结构常数进一步研究.

设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha, \tag{1}$$

在 $\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 中分别取 $e_\alpha,e_{-\alpha}$ 使得

$$(e_\alpha,e_{-\alpha})=1. \tag{2}$$

又设 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$，由 $[e_\alpha,e_\beta]\in\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$，可记

$$[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}. \tag{3}$$

定理 5.4.2 设 Δ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系，$e_\alpha,e_{-\alpha},N_{\alpha\beta}$ 等如上所述. 则下面结果成立：

1) $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$，则

$$N_{\alpha\beta}=-N_{\beta\alpha}; \tag{4}$$

2) $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$，且 $\alpha+\beta+\gamma=0$，则

$$N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}; \tag{5}$$

3) $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Delta,\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$，且 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 中任意二根之和均不为零，则

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}+N_{\alpha\gamma}N_{\delta\beta}+N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}=0; \tag{6}$$

4) $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq 0$，过 β 的 α-链为 $\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$，则

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta}=-\frac{1}{2}q(p+1)(\alpha,\alpha). \tag{7}$$

证 1) 由于 $[e_\alpha,e_\beta]=-[e_\beta,e_\alpha]$，故(4)式成立.

2) 由于 $\alpha+\beta=-\gamma\in\Delta,\alpha+\gamma=-\beta\in\Delta$，故由

$$([e_\alpha,e_\beta],e_\gamma)+(e_\beta,[e_\alpha,e_\gamma])=0,$$

及(3)式得

$$N_{\alpha\beta}(e_{\alpha+\beta},e_\gamma)+N_{\alpha\gamma}(e_\beta,e_{\alpha+\gamma})=0.$$

又由(2)式与(4)式得

$$N_{\alpha\beta}=N_{\gamma\alpha}.$$

同样，$N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}$，即(5)式成立.

3) 若 $\beta+\gamma\in\Delta$，由 $\alpha+\beta+\gamma=-\delta\in\Delta$，知

$$[e_\alpha,[e_\beta,e_\gamma]]=N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\beta+\gamma}e_{-\delta}.$$

因为 $\alpha+(\beta+\gamma)+\delta=0$，由(5)式知

$$N_{\alpha,\beta+\gamma}=-N_{\alpha\delta},$$

于是

$$[e_\alpha,[e_\beta,e_\gamma]]=-N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}e_{-\delta}. \tag{8}$$

若 $\beta+\gamma\notin\Delta$，由 $N_{\beta\gamma}=0$，知(8)式仍然成立. 类似地，有

$$[e_\beta,[e_\gamma,e_\alpha]]=-N_{\beta\delta}N_{\gamma\alpha}e_{-\delta}, \tag{8'}$$

$$[e_\gamma,[e_\alpha,e_\beta]]=-N_{\gamma\delta}N_{\alpha\beta}e_{-\delta}. \tag{8''}$$

将(8)，(8′)及(8″)相加，再由 Jacobi 等式得

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}+N_{\alpha\gamma}N_{\delta\beta}+N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}=0,$$

即(6)式成立.

4) 由定理 3.2.4 之结论 3)有

$$[e_{-\alpha},[e_\alpha,e_\beta]]=\frac{1}{2}q(p+1)(\alpha,\alpha)e_\beta.$$

另一方面，

$$[e_{-\alpha},[e_\alpha,e_\beta]]=N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}e_\beta.$$

从$-\alpha+(\alpha+\beta)+(-\beta)=0$及(5)式知

$$N_{-\alpha,\alpha+\beta}=N_{-\beta,-\alpha}=-N_{-\alpha,-\beta},$$

于是

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta}=-\frac{1}{2}q(p+1)(\alpha,\alpha),$$

即(7)式成立. ▌

定理 5.4.3 设$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为复半单李代数$\mathfrak{g}$的素根系，则

1) $e_{\pm\alpha_1},e_{\pm\alpha_2},\cdots,e_{\pm\alpha_n}$生成$\mathfrak{g}$;

2) $\forall\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0,N_{\alpha\beta}$由$\{N_{\alpha_i\delta}\mid\alpha_i\in\Pi,\delta\in\Delta_+\}$完全决定.

证 记$\mathfrak{g}_1$为由$e_{\pm\alpha_1},e_{\pm\alpha_2},\cdots,e_{\pm\alpha_n}$生成的$\mathfrak{g}$的子代数. 由于$\alpha_i=[e_{\alpha_i},e_{-\alpha_i}]\in\mathfrak{g}_1$，故$\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{g}_1$. 又$\forall\alpha\in\Delta_+$，若$\alpha\in\Pi$，则$e_\alpha\in\mathfrak{g}_1$；若$\alpha\overline{\in}\Pi$，由定理3.4.2的结论5)有$\alpha_i\in\Pi$，使得$\alpha-\alpha_i\in\Delta_+$. 显然，$\mathrm{ht}(\alpha-\alpha_i)=\mathrm{ht}\alpha-1$. 若$e_{\alpha-\alpha_i}\in\mathfrak{g}_1$，则$[\mathfrak{g}_{\alpha_i},\mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_i}]=\mathfrak{g}_\alpha\subseteq\mathfrak{g}_1$. 同样，$\mathfrak{g}_{-\alpha}\subseteq\mathfrak{g}_1$，故$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1$，即结论1)成立.

2) 我们首先将问题归结为α,β都是正根的情况.

若$\alpha,\beta\in\Delta_-$，则$-\alpha,-\beta\in\Delta_+$. 由(7)知

$$N_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}q(p+1)(\alpha,\alpha)N^{-1}_{-\alpha,-\beta},$$

即$N_{\alpha\beta}$可被$N_{-\alpha,-\beta}$表出，其中$-\alpha,-\beta\in\Delta_+$.

若α,β中一为负根，一为正根，不妨设$\alpha\in\Delta_-,\beta\in\Delta_+$，此时分两种情形：

(i) $\alpha+\beta\overline{\in}\Delta$，则$N_{\alpha\beta}=0$;

(ii) $\alpha+\beta\in\Delta$. 记$\gamma=\alpha+\beta$，于是$\alpha+\beta+(-\gamma)=0$. 因而由(5)式有

$$N_{\alpha\beta}=N_{\beta,-\gamma}=N_{-\gamma\alpha}.$$

若$\gamma\in\Delta_+$，则$-\gamma,\alpha\in\Delta_-$，于是$N_{\alpha\beta}$可被$N_{\gamma,-\alpha}$表出，这里$\gamma,-\alpha\in$

Δ_+. 若 $\gamma\in\Delta_-$，则 $\beta,-\gamma\in\Delta_+$，$N_{\alpha\beta}$可被 $N_{\beta,-\gamma}$表出.

综上所述，结论 2)归结为 $\alpha,\beta\in\Delta_+$的情形. 我们对 $\mathrm{ht}\alpha+\mathrm{ht}\beta$ 与 $\mathrm{ht}\beta$ 作双重归纳证明.

显然，$\mathrm{ht}\alpha+\mathrm{ht}\beta=2$ 时，$\mathrm{ht}\alpha=\mathrm{ht}\beta=1$，亦即 $\alpha,\beta\in\Pi$，结论自然成立. 设 $\mathrm{ht}\alpha+\mathrm{ht}\beta=k-1$ 时结论成立，现证 $\mathrm{ht}\alpha+\mathrm{ht}\beta=k$ 时结论成立. 若 $\mathrm{ht}\beta=1$，结论是显然的，故设 $\mathrm{ht}\beta>1$，即 $\beta\in\Delta_+-\Pi$. 因而由定理 3.4.2 之结论 5)有 $\gamma\in\Delta_+,\alpha_i\in\Pi$，使得 $\beta=\gamma+\alpha_i$，故 $\mathrm{ht}\gamma=\mathrm{ht}\beta-1$. 令 $\alpha+\beta=\delta$，于是有

$$\alpha+\gamma+\alpha_i-\delta=0,$$

且 α,γ,α_i 与 $-\delta$ 中任何两个根之和不为零. 故由(6)式有

$$N_{\alpha_i\gamma}N_{\alpha,-\delta}+N_{\alpha_i\alpha}N_{-\delta\gamma}+N_{\alpha_i,-\delta}N_{\gamma\alpha}=0.$$

显然 $N_{\alpha_i\gamma}\neq0$. 又由于 $\alpha-\delta+\beta=0$，故由(5)式与(4)式有

$$N_{\alpha,-\delta}=N_{\beta\alpha}=-N_{\alpha\beta}.$$

因而

$$N_{\alpha\beta}=N_{\alpha_i\gamma}^{-1}(N_{\alpha_i\alpha}N_{-\delta\gamma}+N_{\alpha_i,-\delta}N_{\gamma\alpha}).$$

由于 $-\delta+\gamma+(\alpha_i+\alpha)=0$，故

$$N_{-\delta\gamma}=N_{\gamma,\alpha_i+\alpha}=-N_{\alpha_i+\alpha,\gamma}.$$

而 $\mathrm{ht}(\alpha_i+\alpha)+\mathrm{ht}\gamma=k$，$\mathrm{ht}\gamma=\mathrm{ht}\beta-1$. 又对 $\mathrm{ht}\beta$ 的归纳假设知，$N_{-\delta\gamma}$ 可被 $\{N_{\alpha_j\varepsilon}\mid\alpha_j\in\Pi,\varepsilon\in\Delta_+\}$表出.

由于 $\alpha_i+(-\delta)+(\alpha+\gamma)=0$，故

$$N_{\alpha_i,-\delta}=N_{\alpha+\gamma,\alpha_i}=-N_{\alpha_i,\alpha+\gamma}.$$

于是 $N_{\alpha_i,-\delta}$可被$\{N_{\alpha_j\varepsilon}\mid\alpha_j\in\Pi,\varepsilon\in\Delta_+\}$表出.

由于 $\mathrm{ht}\gamma+\mathrm{ht}\alpha=k-1$，故 $N_{\gamma\alpha}$也可被$\{N_{\alpha_j\varepsilon}\mid\alpha_j\in\Pi,\varepsilon\in\Delta_+\}$表出.

于是 $\mathrm{ht}\alpha+\mathrm{ht}\beta=k$ 时，结论 2)也成立. 因此结论 2)对任何 $\alpha,\beta\in\Delta$ 成立. ▌

下面我们将完成复半单李代数的分类理论.

引理 5.4.4 设 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$是两个复半单李代数. (x,y)，$(x',y')'$；

$\mathfrak{h},\mathfrak{h}'$；$\Delta,\Delta'$及$\mathfrak{h}_R,\mathfrak{h}'_R$分别为$\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$的 Killing 型，Cartan 子代数，根系及根系生成的 Euclid 空间. 又φ是$\mathfrak{h}_R$到$\mathfrak{h}'_R$的线性同构，且$\varphi(\Delta)=\Delta'$. 则φ是 Euclid 空间的同构，即

$$(\varphi(x),\varphi(y))'=(x,y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{h}_R. \tag{9}$$

证 设$\alpha,\beta\in\Delta$，且过β的α-链为$\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$. 由于$\varphi$是线性同构，且$\varphi(\Delta)=\Delta'$，故$\varphi(\alpha),\varphi(\beta)\in\Delta'$，且过$\varphi(\beta)$的$\varphi(\alpha)$-链为

$$\{\varphi(\beta)+k\varphi(\alpha)\mid -p\leqslant k\leqslant q\}.$$

因而有

$$\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=\frac{(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))'}{(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))'},$$

于是

$$(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha,\alpha)}{(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))'}(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))'.$$

记

$$c_\alpha=(\alpha,\alpha)/(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))'.$$

同样，考虑过α的β-链，则可得

$$(\alpha,\beta)=c_\beta(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))',$$

于是有$c_\alpha=c_\beta=c$. 另一方面又有

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)&=\sum_{\gamma\in\Delta}(\alpha,\gamma)(\beta,\gamma)\\&=c^2\sum_{\varphi(\gamma)\in\Delta'}(\varphi(\alpha),\varphi(\gamma))'(\varphi(\beta),\varphi(\gamma))'\\&=c^2(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))',\end{aligned}$$

因而$c^2=c$，$c=1$，即

$$(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))'.$$

又由Δ,Δ'中含$\mathfrak{h}_R,\mathfrak{h}_R'$的基，故$\varphi$为 Euclid 空间的同构. ▎

引理 5.4.5 φ如引理 5.4.4 所述，则φ可开拓为$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{g}'$的李代数的同构.

证 记$\alpha'=\varphi(\alpha)$，$\forall\alpha\in\Delta$. 在$\mathfrak{h}_R$中取定一组基$x_1,x_2,\cdots,x_n$.

引进对此基的字典序. 于是有正根系 Δ_+ 与素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$. 显然, $\mathfrak{h}'_R$ 中对基 $\varphi(x_1),\varphi(x_2),\cdots,\varphi(x_n)$ 的字典序所确定的正根系, 素根系分别为 $\Delta'_+=\varphi(\Delta_+)$, $\Pi'=\varphi(\Pi)=\{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n\}$. 令

$$\Delta_k=\{\alpha\in\Delta \mid |\mathrm{ht}\alpha|\leqslant k\}, \tag{10}$$

$$\Delta'_k=\{\alpha'\in\Delta \mid |\mathrm{ht}\alpha'|\leqslant k\}. \tag{10'}$$

显然有

$$\varphi(\Delta_k)=\Delta'_k.$$

令

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h},\quad \mathfrak{g}_k=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta_k}\mathfrak{g}_\alpha, \tag{11}$$

$$\mathfrak{g}'_0=\mathfrak{h}',\quad \mathfrak{g}'_k=\mathfrak{h}'+\sum_{\alpha'\in\Delta'_k}\mathfrak{g}'_{\alpha'}, \tag{11'}$$

于是 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ 的子空间序列

$$\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}_1\subset\mathfrak{g}_2\subset\cdots,$$

$$\mathfrak{g}'_0\subset\mathfrak{g}'_1\subset\mathfrak{g}'_2\subset\cdots$$

都是有限的.

现在我们逐步将 φ 开拓为 $\mathfrak{g}_k$ 到 $\mathfrak{g}'_k$ 的线性同构, 且满足:

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=\varphi([x,y]),\quad \forall x,y,[x,y]\in\mathfrak{g}_k. \tag{12}$$

将每次开拓后的映射仍记为 φ.

设 $x,y\in\mathfrak{h}_R$. 令

$$\varphi(x+\sqrt{-1}y)=\varphi(x)+\sqrt{-1}\varphi(y),$$

于是 φ 是 $\mathfrak{g}_0$ 到 $\mathfrak{g}'_0$ 的线性同构, 且满足条件(12). 并且

$$(\varphi(x),\varphi(y))'=(x,y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}_0. \tag{13}$$

为进一步开拓 φ, 取 $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,\alpha\in\Delta$, 使得

$$(e_\alpha,e_{-\alpha})=1,\quad \alpha\in\Delta.$$

又若 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$, 记

$$[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}.$$

在 $\mathfrak{g}'_{\pm\alpha'_i}$ 中取 $e'_{\pm\alpha'_i}(1\leqslant i\leqslant n)$, 使得

$$(e'_{-\alpha'_i},e'_{\alpha'_i})'=1,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

现将φ扩充为$\mathfrak{g}_1$到$\mathfrak{g}_1'$的线性同构，使得

$$\varphi(e_{\pm\alpha_i})=e'_{\pm\alpha_i'},\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

由于

$$[\varphi(e_{\alpha_i}),\varphi(e_{-\alpha_j})]=\delta_{ij}\alpha_i'=\varphi([e_{\alpha_i},e_{-\alpha_j}]),$$

$$\begin{aligned}[\varphi(h),\varphi(e_{\pm\alpha_i})]&=(\varphi(h),\pm\alpha_i')'e'_{\pm\alpha_i'}\\&=(h,\pm\alpha_i)e'_{\pm\alpha_i'}\\&=\varphi([h,e_{\pm\alpha_i}]),\quad \forall h\in\mathfrak{h}.\end{aligned}$$

于是扩充到$\mathfrak{g}_1$的映射φ也满足条件(12).

现假定已将φ扩充为$\mathfrak{g}_k$到$\mathfrak{g}_k'$的线性同构，且满足(12). 设$\alpha\in\Delta_+$，且$\mathrm{ht}\alpha=k+1$. 因而有$\alpha_{i_0}\in\Pi,\beta\in\Delta_+$，使得$\alpha=\alpha_{i_0}+\beta$. 显然$\mathrm{ht}\beta=k$，于是$N_{\alpha_{i_0}\beta}\neq0$. 取

$$e_{\alpha'}'=N_{\alpha_{i_0}\beta}^{-1}[e'_{\alpha'_{i_0}},\ e'_{\beta'}].$$

再取$e'_{-\alpha'}\in\mathfrak{g}'_{-\alpha'}$使得

$$(e'_{\alpha'},e'_{-\alpha'})=1.$$

将φ扩充为$\mathfrak{g}_{k+1}$到$\mathfrak{g}'_{k+1}$上的线性映射使得

$$\varphi(e_\alpha)=e'_{\alpha'},\quad \varphi(e_{-\alpha})=e'_{-\alpha'}.$$

若$\gamma,\delta\in\Delta_+$，使$\alpha=\gamma+\delta$，于是$\mathrm{ht}\gamma\leqslant k,\mathrm{ht}\delta\leqslant t$. 如果$\alpha_{i_0}=\gamma$或$\alpha_{i_0}=\delta$，显然有

$$[e'_{\gamma'},e'_{\delta'}]=N_{\gamma\delta}\,e'_{\alpha'}.$$

故可设$\alpha_{i_0}-\gamma\neq0,\alpha_{i_0}-\delta\neq0$，于是$\alpha_{i_0},\beta,-\gamma,-\delta$中任何二根之和不为零，但$\alpha_{i_0}+\beta-\gamma-\delta=0$. 因而由(6)式有

$$N_{\alpha_{i_0}\beta}N_{-\gamma,-\delta}+N_{\alpha_{i_0},-\gamma}N_{-\delta\beta}+N_{\alpha_{i_0},-\delta}N_{\beta,-\gamma}=0.$$

又设

$$[e'_{\gamma'},e'_{\delta'}]=N_{\gamma'\delta'}\,e'_{\alpha'},$$

$$[e'_{-\gamma'},e'_{-\delta'}]=N_{-\gamma'-\delta'}\,e'_{-\alpha'}.$$

仍由(6)式，可得

$$N_{\alpha'_{i_0}\beta'}N_{-\gamma',-\delta'}+N_{\alpha'_{i_0},-\gamma'}N_{-\delta'\beta'}+N_{\alpha'_{i_0},-\delta'}N_{\beta',-\gamma'}=0.$$

由于 $\mathrm{ht}\alpha'_{i_0},\mathrm{ht}\beta,\mathrm{ht}\gamma,\mathrm{ht}\delta\leqslant k$；且 $\alpha'_{i_0}-\gamma',-\delta'+\beta',\alpha'_{i_0}-\delta',\beta'-\gamma'\in\Delta'$；而且它们的高度的绝对值不超过 k（即均在 $\Delta k'$ 中）. 于是有

$$N_{\alpha_{i_0},-\gamma}N_{-\delta\beta}+N_{\alpha_{i_0},-\delta}N_{\beta,-\gamma}=N_{\alpha'_{i_0},-\gamma'}N_{-\delta'\beta'}+N_{\alpha'_{i_0},-\delta'}N_{\beta',-\gamma'},$$

因而
$$N_{\alpha'_{i_0}\beta'}N_{-\gamma',-\delta'}=N_{\alpha_{i_0}\beta}N_{-\gamma,-\delta}.$$

由 $e'_{\alpha'}$ 的定义知，

$$N_{\alpha'_{i_0}\beta'}=N_{\alpha_{i_0}\beta},$$

因而
$$N_{-\gamma',-\delta'}=N_{-\gamma,-\delta}.$$

由(7)式得
$$N_{\gamma'\delta'}=N_{\gamma\delta},$$

即有
$$[e'_{\gamma'},e'_{\delta'}]=N_{\gamma\delta}e'_{\alpha'}.$$

这里我们也证明了 φ 由 $\mathfrak{g}_k$ 到 $\mathfrak{g}_{k+1}(k\geqslant1)$ 扩充的唯一性. 又由 $\alpha'-\gamma'-\delta'=0,\alpha-\gamma-\delta=0$，得

$$N_{\alpha',-\gamma'}=N_{-\gamma',-\delta'}=N_{-\gamma,-\delta}=N_{\alpha,-\gamma}.$$

同样

$$N_{-\alpha'\gamma'}=N_{-\alpha\gamma},$$

即 φ 是 $\mathfrak{g}_{k+1}$ 到 $\mathfrak{g}'_{k+1}$ 的线性同构，且满足条件(12).

显然，存在 $k_0\in N$，使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{k_0}$. 于是 φ 经过有限步扩充后，就成为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}'$ 的李代数的同构. ▌

定理 5.4.6 二复半单李代数同构当且仅当它们的 Dynkin 图相同.

证 设复半单李代数 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ 的 Dynkin 图相同，即 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ 分别有 Cartan 子代数 $\mathfrak{h},\mathfrak{h}'$；根系 Δ,Δ'；素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\},\Pi'=\{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_n\}$. 并有 Π 到 Π' 的映射 φ，满足

$$\varphi(\alpha_i)=\alpha'_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n,\tag{14}$$

$$\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=\frac{2(\alpha'_i,\alpha'_j)'}{(\alpha'_i,\alpha'_i)},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.\tag{15}$$

由于 Π,Π' 分别为 $\mathfrak{h}_R,\mathfrak{h}'_R$ 的基，故 φ 可以开拓为 $\mathfrak{h}_R$ 到 $\mathfrak{h}'_R$ 的线性同构.

设 W,W' 分别为 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ 的 Weyl 群，故由(15)式知 $r_{\alpha_i},r_{\alpha'_i}$ 在基 Π，

Π'下有相同的矩阵,即

$$M_{\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}}(r_{\alpha_i})=M_{\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n'\}}(r_{\alpha_i'}).\tag{16}$$

而$\{r_{\alpha_i}|1\leqslant i\leqslant n\}$,$\{r_{\alpha_i'}|1\leqslant i\leqslant n\}$分别为$W$,$W'$的生成组,故有$W$到$W'$的同构映射$\varphi_*$:

$$\varphi_*(w)=\varphi w\varphi^{-1}=w',\quad \forall w\in W.\tag{17}$$

设$\alpha\in\Delta$.于是由定理4.1.3与定理4.2.3知存在$w\in W$,$\alpha_i\in\Pi$,使得$w(\alpha)=\alpha_i$,因而有

$$\varphi(\alpha)=\varphi(w^{-1}(\alpha_i))=\varphi w^{-1}\varphi^{-1}(\varphi(\alpha_i))=(w')^{-1}\alpha_i'\in\Delta',$$

于是有$\varphi(\Delta)\subseteq\Delta'$.同样,$\varphi^{-1}(\Delta')\subseteq\Delta$,故

$$\varphi(\Delta)=\Delta'.$$

由引理5.4.4与引理5.4.6知φ可以开拓为$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{g}'$的李代数同构,即$\mathfrak{g}$与$\mathfrak{g}'$同构.

反之,设φ是复半单李代数$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{g}'$的同构,于是

$$(\varphi(x),\varphi(y))'=(x,y),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.\tag{18}$$

设$\mathfrak{h}$为$\mathfrak{g}$的Cartan子代数.Δ,Π为对应的根系与素根系,于是

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha.$$

此时$\mathfrak{h}'=\varphi(\mathfrak{h})$为$\mathfrak{g}'$的Cartan子代数,且有

$$\mathfrak{g}'=\mathfrak{h}'+\sum_{\alpha'\in\Delta'}\mathfrak{g}_{\alpha'}'.$$

由于对$h\in\mathfrak{h}$,$e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$有

$$\varphi([h,e_\alpha])=(\alpha,h)\varphi(e_\alpha),$$

$$[\varphi(h),\varphi(e_\alpha)]=\varphi([h,e_\alpha]),$$

因而有

$$\varphi(\mathfrak{g}_\alpha)=\mathfrak{g}_{\varphi(\alpha)},$$

故$\varphi(\Delta)=\Delta'$.$\varphi(\Pi)=\Pi'$也是$\varphi(\mathfrak{h}_R)$对某种次序的素根系,且由(18)式知,Π与Π'的Dynkin图是相同的. ▌

从定理5.4.1与定理5.4.6我们知,在同构意义下,复半单李

代数完全由它的 Dynkin 图所决定. 特别,复单李代数的 Dynkin 图是连通的. 由定理 3.5.6 知,连通的 Dynkin 图只能有 $A_l, B_l, C_l, D_l, E_6, E_7, E_8, F_4$ 与 G_2. 定理 4.8.4 则证明对应前面每个 Dynkin 图均有复单李代数存在. 这样,我们可以用 Dynkin 图来表示复单李代数,于是得复单李代数的完全分类.

定理 5.4.7 在同构意义下,复单李代数有 $A_l(l\geqslant 1), B_l(l\geqslant 2), C_l(l\geqslant 2)$ 及 $D_l(l\geqslant 4)$ 四大类与 E_6, E_7, E_8, F_4 与 G_2 五个特殊(例外)单李代数,其中 B_2 与 C_2 同构.

习　题

1. 设 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_1$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个 Cartan 子代数,Π, Π_1 为相应的素根系,A, A_1 为由 Π, Π_1 确定的 Cartan 矩阵. 试证存在置换矩阵(即将单位矩阵的行或列置换所得的矩阵)P,使得 $PAP'=A_1$.

2. 设 A, A_1 分别为复半单李代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 矩阵. 试证 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}'$ 同构的充要条件是存在置换矩阵 P,使得 $PAP'=A_1$.

3. 给出 $sp(2,\boldsymbol{C})$ 与 $so(5,\boldsymbol{C})$ 之间的同构映射.

4. 给出 $so(4,\boldsymbol{C})$ 与 $sl(2,\boldsymbol{C})\oplus sl(2,\boldsymbol{C})$ 之间的同构映射.

5. 证明 $so(6,\boldsymbol{C})$ 与 $sl(4,\boldsymbol{C})$ 同构.

§5　自同构群

本节主要讨论复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$,$\mathfrak{g}$ 的内自同构群 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 及商群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$. 对于单李代数,我们将完全决定此商群.

由于 $\mathfrak{g}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的有限维线性空间,于是对任何 $\mathscr{A}\in \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$,

$$e^{\mathscr{A}} = \exp(\mathscr{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathscr{A}^n$$

是 $\mathfrak{g}$ 的可逆线性变换. 特别当 $\mathscr{A}=\mathrm{ad}x, x\in\mathfrak{g}$ 时由定理 1.5.4 知 $\exp(\mathrm{ad}x)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 以 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 表示由 $\{\exp(\mathrm{ad}x)\mid x\in\mathfrak{g}\}$ 生成的 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的子群,称为 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群. 如定理 1.5.4,可证明 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 的正规子群.

引理 5.5.1 设 $\mathfrak{h}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 令

$$\mathfrak{a}=\{\sigma\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}\mid\sigma(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}\},\tag{1}$$

$$\mathfrak{a}_0=\{\sigma_0\in\mathrm{Int}\mathfrak{g}\mid\sigma_0(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}\},\tag{2}$$

则 $\mathfrak{a},\mathfrak{a}_0$ 分别为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g},\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 的子群;$\mathfrak{a}_0$ 为 $\mathfrak{a}$ 的正规子群;且 $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_0$ 与 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 同构.

证 显然,$\mathfrak{a},\mathfrak{a}_0$ 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g},\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 的子群;而且 $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}\cap\mathrm{Int}\mathfrak{g}$,故 $\mathfrak{a}_0$ 为 $\mathfrak{a}$ 的正规子群. 设 π 为 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$ 到 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 的自然同态,π_1 为 π 在 $\mathfrak{a}$ 上的限制,于是 $\mathrm{Ker}\pi_1=\mathfrak{a}_0$.

任取 $\theta\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$,于是 $\theta(\mathfrak{h})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数,故有 $\theta_1\in\mathscr{E}(\mathfrak{g})\subseteq\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 使得 $\theta_1(\mathfrak{h})=\theta(\mathfrak{h})$. 故 $\sigma=\theta_1^{-1}\theta\in\mathfrak{a}$,而 $\pi_1(\sigma)=\pi(\theta_1^{-1}\theta)=\pi(\theta)$,由此可知 π_1 是满同态. 故 $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_0$ 与 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 同构. ▌

定义 5.5.1 称商群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**外自同构群**.

为了讨论 $\mathfrak{g}$ 的外自同构群,我们再证明几个引理.

引理 5.5.2 设 $\sigma\in\mathfrak{a}$,则

$$\sigma(h)=h,\quad\forall h\in\mathfrak{h}\tag{3}$$

当且仅当存在 $h_0\in\mathfrak{h}$,使得

$$\sigma=\exp(\mathrm{ad}h_0),\tag{4}$$

而且 h_0 是唯一的.

证 充分性是显然的. 现证必要性. 设 $\Delta,\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 分别为根系,素根系. 若 σ 满足(3)式,则 $\sigma(\alpha)=\alpha,\forall\alpha\in\Delta$,于是 $\sigma(\mathfrak{g}_\alpha)=\mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}=\mathfrak{g}_\alpha$. 注意到 $\dim\mathfrak{g}_\alpha=1$,故有 $\lambda_\alpha\in\boldsymbol{C},\lambda_\alpha\neq0$ 使得

$$\sigma(e_\alpha)=\lambda_\alpha e_\alpha,\quad e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha.$$

由 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_{-\alpha}]\subseteq\mathfrak{h},[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]\subseteq\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$,于是有

$$\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}=1,\quad\lambda_\alpha\lambda_\beta=\lambda_{\alpha+\beta}.$$

特别，若 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\alpha_i$，则

$$\lambda_\alpha=\lambda_{\alpha_1}^{k_1}\lambda_{\alpha_2}^{k_2}\cdots\lambda_{\alpha_n}^{k_n}.$$

由 Π 为 $\mathfrak{h}$ 的基，故有唯一的 h_0 使得

$$(h_0,\alpha_i)=\log\lambda_{\alpha_i},$$

显然 $\sigma=\exp(\mathrm{ad}h_0)$. ▌

一般，若 $x\in\mathfrak{g}$，则

$$\mathfrak{g}_1(\exp(\mathrm{ad}x))\supseteq\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}x),$$

因而

$$\dim\mathfrak{g}_1(\exp(\mathrm{ad}x))\geqslant\mathrm{rank}\mathfrak{g}. \tag{5}$$

从这个关系式出发应用李群理论可以证明

$$\dim\mathfrak{g}_1(\sigma)\geqslant\mathrm{rank}\mathfrak{g},\quad\forall\sigma\in\mathrm{Int}\mathfrak{g}. \tag{6}$$

事实上，在 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 中有闭曲线 $\{\gamma(t)\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 使得 $\gamma(0)=\mathrm{id}$，$\gamma(1)=\sigma$. 于是 $\gamma(t)$ 可用有限个开邻域 $U_1,U_2,\cdots,U_m(U_i\cap U_{i+1}\neq\varnothing)$ 覆盖，且 $\mathrm{id}\in U_1$，U_1 中元素均可表示为 $\exp(\mathrm{ad}x)$ 的形式，$\sigma\in U_m$. 显然，$\tau\in U_1$ 时，其特征多项式

$$\det(\lambda\cdot\mathrm{id}-\tau)=\sum_{i=0}^{\dim\mathfrak{g}}\varphi_i(\tau)(\lambda-1)^i$$

中 $\varphi_i(\tau)$ 均为 τ 的解析函数. 由(5)式知

$$\varphi_0(\tau)=\varphi_1(\tau)=\cdots=\varphi_{n-1}(\tau)=0. \tag{5'}$$

由 $U_1\cap U_2\neq\varnothing$，故(5′)式对 $\tau\in U_2,U_3,\cdots,U_m$ 均成立. 因而(6)式成立.

引理 5.5.3 以 W 表示 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的 Weyl 群，则

$$\{\sigma_0|_{\mathfrak{h}_R}\mid\sigma_0\in\mathfrak{a}_0\}=W. \tag{7}$$

证 令 $W_1=\{\sigma_0|_{\mathfrak{h}_R}\mid\sigma_0\in\mathfrak{a}_0\}$. 由定理 4.4.1 知 $W\subseteq W_1$.

设 $\sigma_0\in\mathfrak{a}_0$. 在 Δ 中取素根系，正根系及负根系 Π,Δ_+,Δ_-. 显然，$\sigma_0(\Delta)=\Delta$，故 $\sigma_0(\Pi)$ 也可为 Δ 的素根系. 故由定理 4.2.3 与定理 4.4.1 知，存在 $\theta\in\mathfrak{a}_0$ 使得 $\theta\sigma_0(\Pi)=\Pi$，$\theta|_{\mathfrak{h}_R}\in W$. 记 $\sigma=\theta\sigma_0$，则

$$\sigma|_{\mathfrak{h}_R}=(\sigma\cdot\exp(\mathrm{ad}h))|_{\mathfrak{h}_R},\quad \forall h\in\mathfrak{h}.$$

下面我们将证明，存在 $h_0\in\mathfrak{h}$，使得

$$(\sigma\exp(\mathrm{ad}h_0))|_{\mathfrak{h}_R}=\mathrm{id}_{\mathfrak{h}_R}.$$

于是

$$\sigma_0|_{\mathfrak{h}_R}=\theta^{-1}|_{\mathfrak{h}_R}\in W,$$

即有 $W_1\subseteq W$，可以证明(7)式.

由于 $\sigma(\Pi)=\Pi$，故 $\sigma(\Delta_+)=\Delta_+,\sigma(\Delta_-)=\Delta_-$. 于是 $\Delta_+(\Delta_-)$ 可分解为 σ 作用下的轨道之并. 若 $\alpha\in\Delta_+(\Delta_-)$ 的轨道为 $\{\alpha,\sigma(\alpha),\sigma^2(\alpha),\cdots,\sigma^{q-1}(\alpha)\}$，则

$$\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}+\cdots+\mathfrak{g}_{\sigma^{q-1}(\alpha)},\quad \sigma^j(\alpha)\in\Delta_+(\Delta_-)\tag{8}$$

为 σ 的不变子空间. 于是

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus\mathfrak{g}_1\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_t,$$

其中 $\mathfrak{h},\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_t$ 均为 σ 的不变子空间，而且 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_t$ 均可表示为(8)式的形状.

由(8)式知

$$\sigma(e_{\sigma^j(\alpha)})=\lambda_{j+1}e_{\sigma^{j+1}(\alpha)},\quad 0\leqslant j\leqslant q-1,$$

即 σ 在此空间上的限制在基 $e_\alpha,e_{\sigma(\alpha)},\cdots,e_{\sigma^{q-1}(\alpha)}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&\lambda_q\\ \lambda_1&0&0&\cdots&0&0\\ 0&\lambda_2&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&\lambda_{q-1}&0\end{pmatrix},$$

对应的特征多项式为

$$\lambda^q-\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_q.$$

若 $h\in\mathfrak{h}$，则由

$$\sigma\exp(\mathrm{ad}h)(e_{\sigma^j(\alpha)})=\mathrm{e}^{(\sigma^j(\alpha),h)}\lambda_{j+1}e_{\sigma^{j+1}(\alpha)}$$

知 $\sigma\exp(\mathrm{ad}h)$ 在此空间上的限制对应的特征多项式为

$$\lambda^q-\mathrm{e}^{\left(\sum_{j=0}^{q-1}\sigma^j(\alpha),h\right)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_q.$$

由于 $\sum_{j=1}^{q-1}\sigma^j(\alpha)\neq 0$，于是存在 $h\in\mathfrak{h}$，使得

$$e^{\left(\sum_{j=0}^{q-1}\sigma^j(\alpha),h\right)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_q\neq 1,$$

即

$$\mathfrak{g}_1(\sigma\exp(\mathrm{ad}h))\cap(\mathfrak{g}_\alpha\dotplus\mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_{\sigma^{q-1}(\alpha)})=\{0\}.$$

显然，存在 $h_0\in\mathfrak{h}$，使得

$$\mathfrak{g}_1(\sigma\exp(\mathrm{ad}h_0))\cap(\mathfrak{g}_1\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}_t)=\{0\},$$

即

$$\mathfrak{g}_1(\sigma\exp(\mathrm{ad}h_0))\subseteq\mathfrak{h}.$$

另一方面，由(6)式知

$$\mathfrak{g}_1(\sigma\exp(\mathrm{ad}h_0))=\mathfrak{h}.$$

$\sigma\exp(\mathrm{ad}h_0)|_{\mathfrak{h}_R}$是正交变换，因而

$$\sigma\exp(\mathrm{ad}h_0)|_{\mathfrak{h}_R}=\mathrm{id}.$$

这样，我们完成了引理的证明. ▌

引理 5.5.4 设 W 为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的 Weyl 群. 又令

$$V=\{\sigma|_{\mathfrak{h}_R}\,|\,\sigma\in\mathfrak{a}\},$$

则 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 与 V/W 同构.

证 由引理 5.5.1 知 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_0$ 同构. 设 π_1 为 $\mathfrak{a}$ 到 V 的同态：

$$\pi_1(\sigma)=\sigma|_{\mathfrak{h}_R},$$

于是 $\pi_1(\mathfrak{a}_0)=W$. 由 $\mathfrak{a}_0$ 是 $\mathfrak{a}$ 的正规子群，知 W 为 V 的正规子群.

设 $\sigma\in\pi_1^{-1}(W)$，于是 $\sigma|_{\mathfrak{h}_R}=w$. 由定理 4.4.1 知，有 $\theta\in\mathfrak{a}_0$ 使得 $\theta|_{\mathfrak{h}_R}=w$，于是

$$\sigma\theta^{-1}|_{\mathfrak{h}_R}=\mathrm{id}.$$

由引理 5.5.2 知，存在 $h\in\mathfrak{h}$ 使得

$$\sigma\theta^{-1}=\exp(\mathrm{ad}h)\in\mathrm{Int}\mathfrak{g},$$

于是

$$\sigma=\theta\in\mathfrak{a}_0,$$

即 $$\pi_1^{-1}(W)=\mathfrak{a}_0.$$

因而 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 与 V/W 同构. ▌

定义 5.5.2 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是一个 π-系. 若 Π 的置换 τ 使得 Π 对应的 Dynkin 图不变, 则称 τ 为 Dynkin 图的**图自同构**. 所有图自同构构成的群称为**图自同构群**, 记为 $\Gamma_{\mathfrak{g}}$(或 Γ).

显然, $\tau\in\Gamma$ 当且仅当

$$\frac{2(\tau(\alpha_i),\tau(\alpha_j))}{(\tau(\alpha_i),\tau(\alpha_i))}=\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n. \tag{9}$$

Γ 仅与复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 有关. 事实上, 若 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ 所确定的素根系分别为 Π_1,Π_2. 但 Π_1 与 Π_2 确定同一个 Dynkin 图, 因而由 Π_1,Π_2 确定的图自同构群是同构的. 这样, 我们也可以称 Γ 为 $\mathfrak{g}$ 的图自同构群.

定理 5.5.5 复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的外自同构群 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}$ 的图自同构群同构.

证 由引理 5.5.4 知 $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}/\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 与 V/W 同构. 设 Π 为 Δ 中的一个素根系. 对 $\tau\in V$, 则 $\tau(\Delta)=\Delta$, 且 $\tau(\Pi)$ 也是 Δ 的一个素根系. 故存在唯一的 $w\in W$, 使得 $w\tau(\Pi)=\Pi$. 显然, $w\tau$ 满足(9)式. 于是 $w\tau|_\Pi\in\Gamma$, 即 $\forall\tau\in V$, 存在 τ_0 使得 $\tau_0(\Pi)=\Pi,\tau W=\tau_0 W,\tau_0|_\Pi$ 为图自同构.

设 $\tau_1,\tau_2\in V,\tau_i|_\Pi$ 均为图自同构, 而且 $\tau_1 W=\tau_2 W$, 于是 $\tau_1^{-1}\tau_2\in W$, 且 $\tau_1^{-1}\tau_2(\Pi)=\Pi$. 由定理 4.2.3 知 $\tau_1^{-1}\tau_2=\mathrm{id}$, 故 $\tau_1=\tau_2$. 上面的讨论推出: 存在 V/W 到 Γ 的一一同态. 又 $\forall\tau\in\Gamma$, 由定理 5.4.6 知 τ 可以开拓为 $\mathfrak{g}$ 的自同构 τ'. 显然 $\tau'\in\mathfrak{a}$, 而 $\tau'|_{\mathfrak{h}_R}\in V$. 记 $\tau''=\tau'|_{\mathfrak{h}_R}$, 则有 $\tau''|_\Pi=\tau$. 这就说明前面所说的 V/W 到 Γ 的一一同态还是满同态, 因而 V/W 与 Γ 同构. ▌

由于 Dynkin 图, 特别是单李代数的 Dynkin 图很简单, 故其图自同构群极容易求出.

定理 5.5.6 复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的外自同构群(或图自同构群)如下表(S_k 为 k 个文字的对称群):

$\mathfrak{g}$	A_1	$A_n(n>1)$	$B_n(n\geqslant 1)$	$C_n(n\geqslant 1)$
Γ	$\{\mathrm{id}\}$	S_2	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$

$\mathfrak{g}$	$D_n(n\geqslant 3,n\neq 4)$	D_4	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
Γ	S_2	S_3	S_2	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$	$\{\mathrm{id}\}$

证 这是定理 5.5.5 的直接推论. ▌

注 1 本节证明引理 5.5.3 时,我们用(6)式,而(6)式的证明用了李群的理论. 但是定理 5.5.5 的证明可以用代数几何的理论来实现. 虽然篇幅会长一些,但可将复数域 $\boldsymbol{C}$ 换成任意特征为零的代数封闭域.

注 2 对于典型李代数 $\mathfrak{g}$,Aut$\mathfrak{g}$ 与 Int$\mathfrak{g}$ 均可明确表示出来.

例 5.5.1 设 $\mathfrak{g}=A_n=sl(n+1,\boldsymbol{C})$. Int$\mathfrak{g}$ 中元素有形状

$$X\to PXP^{-1},\quad X\in\mathfrak{g},P\in SL(n+1,\boldsymbol{C}).$$

于是 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}=SL(n+1,\boldsymbol{C})/C(SL(n+1,\boldsymbol{C}))=PSL(n+1,\boldsymbol{C})$,其中 $C(SL(n+1,\boldsymbol{C}))=\left\{\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\sqrt{-1}}{n+1}}I_{n+1}\,\middle|\,0\leqslant k\leqslant n\right\}$. 而 $n>1$ 时,

$$X\to -X',\quad X\in\mathfrak{g}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的自同构,但不是内自同构.

例 5.5.2 设 $\mathfrak{g}=B_n$. 此时 $\mathrm{Int}\mathfrak{g}=\mathrm{Aut}\mathfrak{g}=SO(2n+1,\boldsymbol{C})$.

例 5.5.3 设 $\mathfrak{g}=C_n$. 此时,$\mathrm{Int}\mathfrak{g}=\mathrm{Aut}\mathfrak{g}=PSP(n,\boldsymbol{C})=SP(n,\boldsymbol{C})/\{\pm I_{2n}\}$,这里$\{\pm I_{2n}\}$为 $SP(n,\boldsymbol{C})$的中心.

例 5.5.4 设 $\mathfrak{g}=D_n$. 此时,$\mathrm{Int}\mathfrak{g}=PSO(2n,\boldsymbol{C})/\{\pm I_{2n}\}$,$\{\pm I_{2n}\}$是 $SO(2n,\boldsymbol{C})$的中心. $n\geqslant 3,n\neq 4$ 时,$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}=PO(2n,\boldsymbol{C})$,$PO(2n,\boldsymbol{C})=\mathcal{O}(2n,\boldsymbol{C})/\{\pm I_{2n}\}$,$\{\pm I_{2n}\}$也是 $\mathcal{O}(2n,\boldsymbol{C})$的中心.

习 题

1. 设 $\mathfrak{h}$ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数,$\mathfrak{a}=\{\sigma\in\mathrm{Aut}\mathfrak{g}\mid\sigma(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}\}$,$V=\{\sigma|_{\mathfrak{h}_R}\mid\sigma\in\mathfrak{a}\}$,$\Gamma$ 是 $\mathfrak{g}$ 的图自同构群. 试证: V 中有一

子群与 Γ 同构，仍记为 Γ；V 为 Γ 与 Weyl 群 W 的半直积.

2. 设 $\mathfrak{h}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，$\mathfrak{a}$ 及 V 如习题 1 所示. 又设 $\mathfrak{a}$ 到 V 的同态 π_1 为 $\pi_1(\sigma)=\sigma|_{\mathfrak{h}_R}$. 试证：

(i) $\pi_1(\mathfrak{a}\cap \mathrm{Int}\mathfrak{g})=\pi_1(\mathfrak{a}\cap\mathscr{E}(\mathfrak{g}))=W$；

(ii) $\mathrm{Aut}\mathfrak{g}=\Gamma(\mathfrak{g})\cdot\mathscr{E}(\mathfrak{g})=\Gamma(\mathfrak{g})\cdot\mathrm{Int}\mathfrak{g}$，其中 $\Gamma(\mathfrak{g})=\pi_1^{-1}(\Gamma)$ ($\Gamma\subseteq V$，参看习题 1).

3. 设 $\mathfrak{g}$ 为复半单李代数. 试证

$$\mathrm{Int}\mathfrak{g}=\mathscr{E}(\mathfrak{g}).$$

4. 设 $\mathfrak{g}=A_n(n\geqslant 2,n\neq 5)$. 试证明：$V$(参见习题 1)是一个 2 阶子群与 W 的直积.

§6 Weyl 基与 Chevalley 基

为了不同目的，在复半单李代数中，常常要选取不同的基. 例如，为了研究实半单李代数与实半单李群，一般要用 Weyl 基；为研究代数群、李型单群或 Kac-Moody 代数，一般要用 Chevalley 基. 本节将介绍这两种基，并建立这两种基之间的关系.

定理 5.6.1 设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha, \tag{1}$$

则可在 $\mathfrak{g}_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 中选取 e_α 满足

1) $(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$； (2)

2) $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq 0$，记

$$[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}\,e_{\alpha+\beta}. \tag{3}$$

$N_{\alpha\beta}$满足

$$N_{\alpha\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}. \tag{4}$$

证 设 $\mathfrak{h}_R$ 为 Δ 生成的实线性空间，于是 $\mathfrak{h}_R$ 对于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型为 Euclid 空间. 显然，$\varphi=-\mathrm{id}_{\mathfrak{h}_R}\in\mathscr{O}(\mathfrak{h}_R)$，且 $\varphi(\Delta)=\Delta$. 由引理 5.4.5 可将 φ 开拓为 $\mathfrak{g}$ 的自同构，仍记为 φ. 因而

$$\varphi(\mathfrak{g}_\alpha)=\mathfrak{g}_{\varphi(\alpha)}=\mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \alpha\in\Delta. \tag{5}$$

在 $\mathfrak{g}_\alpha$ 中取 x_α,使得

$$(x_\alpha, x_{-\alpha})=1, \quad \alpha\in\Delta.$$

于是有

$$\varphi(x_\alpha)=c_\alpha x_{-\alpha}, \quad \forall\alpha\in\Delta. \tag{5'}$$

由于 $\varphi\in \mathrm{Aut}\mathfrak{g}$,故

$$(\varphi(x_\alpha), \varphi(x_{-\alpha}))=(x_\alpha, x_{-\alpha}).$$

因而

$$c_\alpha c_{-\alpha}=1, \quad \alpha\in\Delta.$$

取 $a_\alpha\in C$,使得

$$a_\alpha a_{-\alpha}=1; \quad a_\alpha^2=-c_{-\alpha}.$$

再令

$$e_\alpha=a_\alpha x_\alpha, \quad \alpha\in\Delta,$$

则

$$(e_\alpha, e_{-\alpha})=1;$$

$$\varphi(e_\alpha)=-e_{-\alpha}. \tag{6}$$

设 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$,记

$$[e_\alpha, e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}.$$

两边以 φ 作用,由(6)式得

$$[e_{-\alpha}, e_{-\beta}]=-N_{\alpha\beta}\, e_{-(\alpha+\beta)},$$

即有

$$N_{-\alpha,-\beta}=-N_{\alpha\beta}.$$

故 $\{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$ 为所求. ▌

定义 5.6.1 满足定理 5.6.1 中条件 1)与 2)的向量组 $\{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的一组 **Weyl 基(mod $\mathfrak{h}$)**,简称 **Weyl 基.**

定理 5.6.1 证明了任何复半单李代数都存在 Weyl 基. 下面我们给出 Weyl 基的两个性质.

定理 5.6.2 设 $\{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组 Weyl 基. 又 $\alpha,\beta\in\Delta$,过 β 的 α-链为 $\{\beta+k\alpha|-p\leqslant k\leqslant q\}$. 则

1) $N_{\alpha\beta}$是实数，且

$$N_{\alpha\beta}^2=\frac{1}{2}q(p+1)(\alpha,\alpha); \tag{7}$$

2) $\{e_\alpha'=\lambda_\alpha e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$为 Weyl 基当且仅当

$$\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}=1, \quad \lambda_{\alpha+\beta}^2=(\lambda_\alpha\lambda_\beta)^2.$$

证 1) 由定理 5.4.2 的结论 4)知，当$\{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$为 Weyl 基时(7)式成立.

2) 显然，$(e_\alpha',e_{-\alpha}')=1$ 当且仅当 $\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}=1$.

又设$[e_\alpha',e_\beta']=N_{\alpha\beta}'e_{\alpha+\beta}'$. 于是

$$\lambda_\alpha\lambda_\beta N_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta}'\lambda_{\alpha+\beta}.$$

因而

$$N_{\alpha\beta}'=\frac{\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha+\beta}}N_{\alpha\beta}=-\frac{\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha+\beta}}N_{-\alpha,-\beta}$$
$$=-\frac{\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha+\beta}}\cdot\frac{\lambda_{-(\alpha+\beta)}}{\lambda_{-\alpha}\lambda_{-\beta}}N_{-\alpha,-\beta}'.$$

于是 $N_{\alpha\beta}'$满足(4)式，当且仅当

$$\frac{\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_{\alpha+\beta}}\cdot\frac{\lambda_{-(\alpha+\beta)}}{\lambda_{-\alpha}\lambda_{-\beta}}=1.$$

再由条件 $\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}=1$ 知$\{e_\alpha'=\lambda_\alpha e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$为 Weyl 基当且仅当 $\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}=1,\lambda_{\alpha+\beta}^2=(\lambda_\alpha\lambda_\beta)^2$. ▌

为讨论 Weyl 基的应用，我们先介绍下面的定义.

定义 5.6.2 设(x,y)是实李代数 $\mathfrak{a}$ 的 Killing 型. 如果

$$(x,x)\leqslant 0, \quad \forall x\in\mathfrak{a}, \tag{8}$$

则称 $\mathfrak{a}$ 为**紧致李代数**.

定理 5.6.3 设$\{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组 Weyl 基，$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为素根系. 令

$$u_\alpha=\frac{1}{2}(e_\alpha-e_{-\alpha}), \quad \alpha\in\Delta_+; \tag{9}$$

$$v_\alpha=\frac{\sqrt{-1}}{2}(e_\alpha+e_{-\alpha}), \quad \alpha\in\Delta_+. \tag{10}$$

则由$\{\sqrt{-1}\alpha_1,\sqrt{-1}\alpha_2,\cdots,\sqrt{-1}\alpha_n,u_\alpha,v_\alpha\mid\alpha\in\Delta_+\}$生成的实线性空间$\mathfrak{g}_u$是一个紧致李代数，而且

$$\dim\mathfrak{g}_u=\dim\mathfrak{g},\tag{11}$$

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_u\dotplus\sqrt{-1}\mathfrak{g}_u.\tag{12}$$

我们称$\mathfrak{g}_u$为$\mathfrak{g}$的**紧致实形式**.

证 (11)式与(12)式是显然的.

现证$\mathfrak{g}_u$对于换位运算封闭. 由于

$$[\sqrt{-1}\alpha_k,u_\alpha]=(\alpha_k,\alpha)v_\alpha;$$

$$[\sqrt{-1}\alpha_k,v_\alpha]=-(\alpha_k,\alpha)u_\alpha;$$

$$[u_\alpha,v_\alpha]=\frac{\sqrt{-1}}{2}\alpha;$$

$$[u_\alpha,u_\beta]=\frac{1}{2}N_{\alpha\beta}u_{\alpha+\beta}-\frac{1}{2}N_{\alpha,-\beta}u_{\alpha-\beta};$$

$$[v_\alpha,v_\beta]=\frac{1}{2}N_{-\alpha\beta}u_{\alpha-\beta}-\frac{1}{2}N_{\alpha\beta}u_{\alpha+\beta};$$

$$[u_\alpha,v_\beta]=\frac{1}{2}N_{\alpha\beta}v_{\alpha+\beta}+\frac{1}{2}N_{\alpha,-\beta}v_{\alpha-\beta},$$

$$N_{\alpha\beta},N_{-\alpha\beta},N_{\alpha,-\beta}\in\boldsymbol{R}.$$

故$\mathfrak{g}_u$对$\mathfrak{g}$的换位运算封闭. 因此$\mathfrak{g}_u$为实李代数，而且

$$\mathfrak{g}_u=\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}\dotplus\sum_{\alpha\in\Delta_+}\boldsymbol{R}u_\alpha\dotplus\sum_{\alpha\in\Delta_+}\boldsymbol{R}v_\alpha.$$

注意到$\{\sqrt{-1}\alpha_1,\sqrt{-1}\alpha_2,\cdots,\sqrt{-1}\alpha_n,u_\alpha,v_\alpha\mid\alpha\in\Delta_+\}$既是$\mathfrak{g}_u$的基，也是$\mathfrak{g}$的基，故$\mathfrak{g}_u$的 Killing 型是$\mathfrak{g}$的 Killing 型在$\mathfrak{g}_u$上的限制. 由于$\mathfrak{g}$的 Killing 型在$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$上是正定的，故在$\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$上是负定的. 又

$$(u_\alpha,u_\beta)=(v_\alpha,v_\beta)=0,\quad \alpha,\beta\in\Delta_+,\alpha\neq\beta;$$

$$(u_\alpha,v_\beta)=0,\quad \forall\alpha,\beta\in\Delta_+;$$

$$(u_\alpha,\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}})=(v_\alpha,\sqrt{-1}\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}})=0,\quad \forall\alpha\in\Delta_+;$$

$$(u_\alpha,u_\alpha)=(v_\alpha,v_\alpha)=-\frac{1}{2}.$$

于是 $\mathfrak{g}_u$ 的 Killing 型是负定的，即

$$(x,x)<0,\quad \forall x\in\mathfrak{g}_u, x\neq 0.$$

因而 $\mathfrak{g}_u$ 是紧致李代数. ▌

自然，$\mathfrak{g}_u$ 也是半单李代数. 紧致半单李代数在紧致李群，实半单李代数的理论中均有重要作用. 实半单李代数的分类问题已经完全解决. 严志达、许以超所著《Lie 群及其 Lie 代数》对此问题有极好的系统而简洁的论述.

下面我们转而讨论复半单李代数的另一重要的基——Chevalley 基. 为此，先给出下面的定义.

定义 5.6.3 设 Δ,Π 分别为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的根系，素根系. $\alpha\in\Delta$，我们称

$$\alpha^\vee=\frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha \tag{13}$$

为 α 的**余根**(coroot)；$\Delta^\vee=\{\alpha^\vee\mid\alpha\in\Delta\}$ 为**余根系**；$\Pi^\vee=\{\alpha_1^\vee,\alpha_2^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee\}$ ($\Pi=\{\alpha_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$) 为**余素根系**.

引理 5.6.4 $\Pi^\vee$ 为 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 中 π-系，其 Dynkin 图是将 Π 的 Dynkin 图中箭头反向. 又 $\alpha\in\Delta_+$，则

$$\alpha^\vee=\sum_{i=1}^n k_i'\alpha_i^\vee,\quad k_i'\in\boldsymbol{Z}_+.$$

证 显然，$\alpha_1^\vee,\alpha_2^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee$ 为 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 中的正向量，且构成一组基. 又 $i\neq j$ 时，

$$\frac{2(\alpha_i^\vee,\alpha_j^\vee)}{(\alpha_i^\vee,\alpha_i^\vee)}=\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\in\boldsymbol{Z}_-,$$

于是 $\Pi^\vee$ 为 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 中 π-系，其 Dynkin 图是 Π 的 Dynkin 图中改变箭头方向.

由于 $r_{\alpha_i}=r_{\alpha_i^\vee}$，故与 $\Pi^\vee$ 对应的 Weyl 群恰为与 Π 对应的 Weyl 群 W. 若 $\alpha\in\Delta$，于是存在 $\alpha_i\in\Pi, w\in W$ 使得 $w(\alpha_i)=\alpha$，因而

$$w(\alpha_i^\vee)=\frac{2}{(\alpha_i,\alpha_i)}w(\alpha_i)=\frac{2}{(w(\alpha_i),w(\alpha_i))}\alpha=\alpha^\vee.$$

由于 $\Pi^\vee$ 为 π-系，由定理 4.7.5 与定理 4.8.4 知存在复半单李代数以 $\Pi^\vee$ 为素根系，故其根系为 $W(\Pi^\vee)=\Delta^\vee$，于是 $\alpha^\vee\in\Delta_+^\vee$ 当且仅当 $\alpha\in\Delta_+$. 故 $\alpha\in\Delta_+$时，有 $k_i'\in\mathbf{Z}_+$使得 $\alpha^\vee=\sum_{i=1}^n k_i'\alpha_i^\vee$. ▌

推论 1 设 $\alpha=\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i\in\Delta$，则

$$\frac{(\alpha,\alpha)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\Big| k_i,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

证 由于

$$\alpha^\vee=\frac{2}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\sum_{i=1}^n\frac{2k_i\cdot(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha,\alpha)(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i=\sum_{i=1}^n\frac{k_i(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha,\alpha)}\alpha_i^\vee,$$

故

$$\frac{k_i(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}.$$

因而推论成立. ▌

推论 2 $w(\alpha)^\vee=w(\alpha^\vee)$, $\forall\alpha\in\Delta, w\in W$.

这可直接验证. ▌

引理 5.6.5 设 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$；又知过 β 的 α-链为$\{\beta+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$，则

$$\frac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}=p+1. \tag{14}$$

证 由定理 3.2.3 知

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=p-q.$$

于是

$$\begin{aligned}p+1-\frac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}&=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}+q+1-\frac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}\\&=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}+1-\frac{q(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}-\frac{2q(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}+1\right)\left(1-\frac{q(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}\right).$$

因为 $\alpha+\beta\in\Delta$,故可假定 Δ 是单李代数的根系. 由于任何单李代数的素根系中最多有两种不同长度的根(仅 $B_n,C_n(n\geqslant 2),F_4$ 与 G_2 有两种不同长度的根),故 Δ 中最多有两种不同长度的根. 下面分情况讨论.

1) $(\alpha,\beta)\geqslant 0$. 由

$$(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+2(\alpha,\beta)$$
$$>\max((\alpha,\alpha),(\beta,\beta)),$$
$$(\beta+2\alpha,\beta+2\alpha)=4(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+4(\alpha,\beta)$$
$$>(\alpha+\beta,\alpha+\beta),$$

知 $(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$, $\beta+2\alpha\overline{\in}\Delta$,即 $q=1$. 因而

$$1-\frac{q(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}=0.$$

故(14)式成立.

2) $(\alpha,\beta)<0$. 由定理 3.3.2 知 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ 与 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 中至少有一个为 -1.

若 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=-1$,则 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}+1=0$. 故(14)式也成立.

若 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\neq -1$,则由定理 3.3.2 知

$$(\beta,\beta)>(\alpha,\alpha)\ ,\quad \left|\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\right|=(\beta,\beta)/(\alpha,\alpha).$$

另一方面,又有

$$(\beta-\alpha,\beta-\alpha)=(\beta,\beta)+(\alpha,\alpha)-2(\alpha,\beta)>(\beta,\beta),$$

因而 $\beta-\alpha\overline{\in}\Delta$,故 $p=0$. 因而

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=-q=-\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)},$$

进而有

$$1-\frac{q(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}=0.$$

(14)式仍成立. ▌

定理 5.6.6 设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为(1)式,$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 为一组素根系. 则在 $\mathfrak{g}$ 中可取基

$$\{\alpha_1^\vee,\alpha_2^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee,x_\alpha\,|\,\alpha\in\Delta\}$$

满足

1) $[x_\alpha,x_{-\alpha}]=\alpha^\vee$, $\forall\alpha\in\Delta$;

2) 设 $[x_\alpha,x_\beta]=C_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}$, $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$,则

$$C_{\alpha\beta}=-C_{-\alpha,-\beta}.$$

这组基称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Chevalley 基**,$\mathfrak{g}$ 对此基的结构常数为整数.

证 取 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 基 $\{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$. 令

$$x_\alpha=\left(\frac{2}{(\alpha,\alpha)}\right)^{1/2}e_\alpha,\quad \alpha\in\Delta.$$

于是

$$[x_\alpha,x_{-\alpha}]=\frac{2}{(\alpha,\alpha)}[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha^\vee,$$

即条件 1)成立.

设 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$; $[x_\alpha,x_\beta]=C_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}$. 又假设 $[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$. 于是

$$C_{\alpha\beta}=\left(\frac{2(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}\right)^{1/2}N_{\alpha\beta}. \tag{15}$$

由定理 5.6.1 与定义 5.6.1 知 $N_{-\alpha,-\beta}=-N_{\alpha\beta}$,故

$$C_{-\alpha,-\beta}=-C_{\alpha\beta},$$

即条件 2)成立.

显然 $\{\alpha_i^\vee,x_\alpha\,|\,1\leqslant i\leqslant n,\alpha\in\Delta\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 由于 $[x_\alpha,x_{-\alpha}]=\alpha^\vee$,由引理 5.6.4 知 $\alpha^\vee$ 是 $\alpha_1^\vee,\alpha_2^\vee,\cdots,\alpha_n^\vee$ 的整系数的线性组合. 又由于

$$[\alpha_i^\vee,x_\alpha]=(\alpha,\alpha_i^\vee)x_\alpha=\frac{2(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}x_\alpha,$$

而 $2(\alpha,\alpha_i)/(\alpha_i,\alpha_i)\in\mathbf{Z}$.

现设 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$. 由条件 2)知

$$C_{\alpha\beta}^2 = -C_{\alpha\beta}C_{-\alpha,-\beta},$$

再由(15)式知

$$C_{\alpha\beta}^2 = -\frac{2(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta}.$$

设过 β 的 α-链为$\{\beta+k\alpha \mid -p\leqslant k\leqslant q\}$. 若 $q=0$,则 $\alpha+\beta\overline{\in}\Delta$. 于是 $C_{\alpha\beta}=0$. 若 $\alpha+\beta\in\Delta$,即 $q\neq0$. 由定理 5.4.2 的结论 4)及引理 5.6.5 知

$$C_{\alpha\beta}^2 = \frac{2(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}\cdot\frac{1}{2}q(p+1)(\alpha,\alpha) = (p+1)^2,$$

因而 $C_{\alpha\beta}=\pm(p+1)\in\boldsymbol{Z}$.

故 $\mathfrak{g}$ 关于 Chevalley 基的结构常数为整数. ▍

关于 Chevalley 基的性质的进一步讨论,以及由 Chevalley 基构造 Chevalley 群等问题可参考 J. E. Humphreys 的《Introduction to Lie algebras and representation theory》及其所列文献.

习 题

1. 求 $sl(n+1,\boldsymbol{C})$的 Weyl 基及其紧致实形式,并将它与 $su(n+1,\boldsymbol{C})=\{X\in \mathrm{gl}(n+1,\boldsymbol{C}) \mid \overline{X}'+X=0,\mathrm{tr}X=0\}$比较.

2. 求 $sl(n+1,\boldsymbol{C})$的 Chevalley 基.

3. 求 $B_n,C_n(n\geqslant2)$及 $D_n(n\geqslant4)$的 Weyl 基与紧致实形式.

4. 求 $B_n,C_n(n\geqslant2)$及 $D_n(n\geqslant4)$的 Chevalley 基.

5. 设 $\mathfrak{g}$ 为复李代数. 若 $\mathfrak{g}$ 的变换 τ 满足下面条件:

1) $\tau^2=\mathrm{id}$;

2) $\tau(x+y)=\tau(x)+\tau(y)$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$;

3) $\tau(ax)=\bar{a}x$, $\forall x\in\mathfrak{g},a\in\boldsymbol{C}$;

4) $\tau([x,y])=[\tau(x),\tau(y)]$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$.

则称 τ 为 $\mathfrak{g}$ 的**半对合**.

试证 $\mathfrak{g}$ 的半对合 τ 的不动点集

$$\mathfrak{g}_\tau=\{x\in\mathfrak{g} \mid \tau(x)=x\}$$

是一个实李代数，且

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_r+\sqrt{-1}\mathfrak{g}\tau,\quad \dim\mathfrak{g}_r=\dim\mathfrak{g}.$$

称 $\mathfrak{g}_r$ 为 $\mathfrak{g}$ 关于 τ 的**实形式**.

6. 设 $\mathfrak{a}$ 是紧致半单李代数. $\sigma\in \mathrm{Aut}\mathfrak{a}$，$\sigma$ 的阶为 2(称 σ 为**对合自同构**). 以 $E_{\pm1}(\sigma)$表示 σ 的属于±1 的特征子空间. 令实线性空间

$$\mathfrak{a}_1=E_1(\sigma)\dotplus\sqrt{-1}E_{-1}(\sigma).$$

在 $\mathfrak{a}_1$ 中定义括积

$$\begin{aligned}&[x_1+\sqrt{-1}y_1,x_2+\sqrt{-1}y_2]\\&\quad=[x_1,x_2]-[y_1,y_2]+\sqrt{-1}([x_1,y_2]+[y_1,x_2]),\\&\qquad x_1,x_2\in E_1(\sigma),y_1,y_2\in E_{-1}(\sigma),\end{aligned}$$

则 $\mathfrak{a}_1$ 也是实半单李代数，但不是紧致的.

7. 设 $\{\alpha_i^\vee,x_\alpha\mid 1\leqslant i\leqslant n,\alpha\in\Delta\}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组 Chevalley 基，又 $x'_\alpha=\mu_\alpha x_\alpha,\alpha\in\Delta,\mu_\alpha\in\boldsymbol{C}$. 试求 $\{\alpha_i^\vee,x'_\alpha\mid 1\leqslant i\leqslant n,\alpha\in\Delta\}$ 也为 Chevalley 基的充分必要条件.

第六章　复半单李代数的表示

复半单李代数理论是数学中少有的极完美的理论之一. 当然，它的价值不仅仅在于其理论的完美性，而且还在于它与别的数学理论及别的学科(例如物理学等)有密切的关系，或者说它有广泛的应用. 复半单李代数之能被广泛应用，是与它的表示理论分不开的. 本章将介绍复半单李代数的表示理论，但我们仅介绍有限维表示理论.

§1　复半单李代数表示的完全可约性

本节将证明复半单李代数的任何有限维表示(或有限维模)是完全可约的.

定理 6.1.1　设(ρ,V)是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的**忠实表示**(即 $\mathrm{Ker}\rho=\{0\}$). 则

$$\beta_\rho(x,y)=\mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)) \tag{1}$$

是 $\mathfrak{g}$ 上非退化对称双线性函数，而且满足

$$\beta_\rho([x,y],z)+\beta_\rho(y,[x,z])=0. \tag{2}$$

又若 $\mathfrak{g}$ 是复单李代数，则存在 $\lambda\in\boldsymbol{C}$ 使

$$\beta_\rho(x,y)=\lambda B(x,y), \tag{3}$$

这里 $B(x,y)$为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型.

证　显然，β_ρ 是 $\mathfrak{g}$ 上对称双线性函数. 又

$$\begin{aligned}&\beta_\rho([x,y],z)+\beta_\rho(y,[x,z])\\&\quad=\mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z)-\rho(y)\rho(x)\rho(z))\\&\qquad+\mathrm{tr}(\rho(y)\rho(x)\rho(z)-\rho(y)\rho(z)\rho(x))\\&\quad=\mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)\rho(z))-\mathrm{tr}(\rho(y)\rho(z)\rho(x))=0,\end{aligned}$$

即(2)式成立. 令

$$\mathfrak{a}=\{x\in\mathfrak{g}\mid\beta_\rho(x,y)=0,\ \forall y\in\mathfrak{g}\}.$$

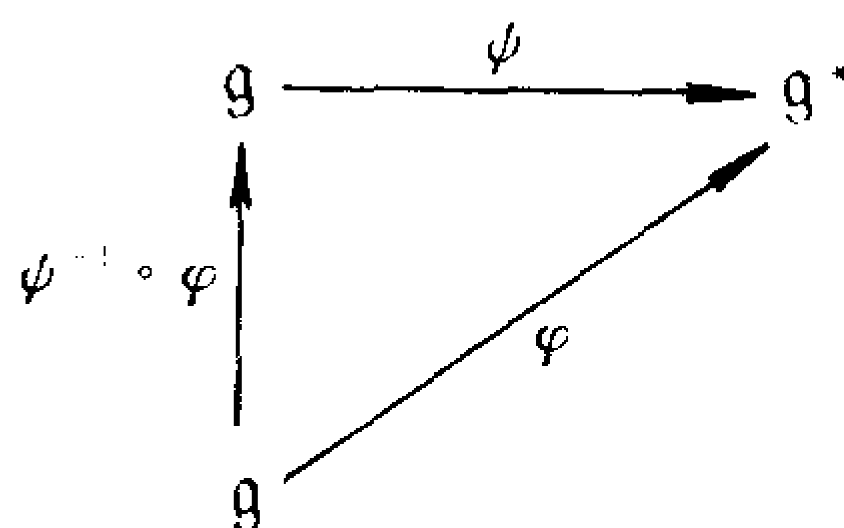
显然,$\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空间. 又若 $x\in\mathfrak{a}$, $y,z\in\mathfrak{g}$,则由

$$\beta_\rho([x,y],z)=\beta_\rho(x,[y,z])=0$$

知 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 又因 ρ 为忠实表示,故 $\rho(\mathfrak{a})$与 $\mathfrak{a}$ 同构. 由第二章 §7 的习题 1 知 $\rho(\mathfrak{a})$是可解李代数,这与 $\mathfrak{g}$ 半单矛盾,故 β_ρ 是非退化的.

现设 $\mathfrak{g}$ 是复单李代数. 由于 β_ρ, B 都是 $\mathfrak{g}$ 上非退化双线性函数,故有 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*$ 的线性同构映射 φ,ψ 使得

$$\varphi(x)(y)=\beta_\rho(x,y),$$
$$\psi(x)(y)=B(x,y),$$



故 $\mathscr{A}=\psi^{-1}\circ\varphi$是 $\mathfrak{g}$ 的可逆线性变换(如右图所示),且有

$$\begin{aligned}B(\mathscr{A}(x),y)&=B(\psi^{-1}\varphi(x),y)\\&=\psi(\psi^{-1}\varphi(x))(y)\\&=\varphi(x)(y)=\beta_\rho(x,y).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}B(\mathrm{ad}z\,(\mathscr{A}(x)),y)&=-B(\mathscr{A}(x),\mathrm{ad}z(y))\\&=-\beta_\rho(x,\mathrm{ad}z(y))=\beta_\rho(\mathrm{ad}z(x),y)\\&=B(\mathscr{A}\mathrm{ad}z(x),y).\end{aligned}$$

由于 B 是非退化的,故

$$\mathrm{ad}z\cdot\mathscr{A}=\mathscr{A}\cdot\mathrm{ad}z,\quad\forall z\in\mathfrak{g}.$$

又由于 $\mathfrak{g}$ 是复单李代数,故$(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$是 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 故由 Schur 引理(定理 1.7.9)知

$$\mathscr{A}=\lambda\cdot\mathrm{id}_\mathfrak{g},$$

因而

$$\beta_\rho(x,y)=B(\mathscr{A}(x),y)=\lambda B(x,y),$$

即(3)式成立. ▌

定理 6.1.2 设(ρ,V)是复半单李代数$\mathfrak{g}$的忠实表示，$x_1,x_2,\cdots,x_m$为$\mathfrak{g}$的基，$y_1,y_2,\cdots,y_m$也是$\mathfrak{g}$的基，而且

$$\beta_\rho(x_i,y_j)=\mathrm{tr}\rho(x_i)\rho(y_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant m.$$

则V的线性变换

$$C_\rho=\sum_{i=1}^m\rho(x_i)\rho(y_i)\tag{4}$$

满足

$$\rho(x)C_\rho=C_\rho\rho(x),\quad \forall x\in\mathfrak{g}.\tag{5}$$

又若(ρ,V)是不可约表示，则

$$C_\rho=\frac{\dim\mathfrak{g}}{\dim V}\,\mathrm{id}_V.$$

证 设$x\in\mathfrak{g}$，且

$$[x,x_i]=\sum_{l=1}^m a_{li}x_l,\quad [x,y_i]=\sum_{l=1}^m b_{li}y_l.$$

因而

$$\beta_\rho([x,x_i],y_j)=\sum_{l=1}^m a_{li}\beta_\rho(x_l,y_j)=a_{ji};$$

$$\beta_\rho([x,y_k],x_j)=\sum_{l=1}^m b_{lk}\beta_\rho(y_l,x_j)=b_{jk}.$$

由(2)式得

$$b_{jk}=-a_{kj},\quad 1\leqslant j,k\leqslant m,$$

进而

$$\begin{aligned}[\rho(x),C_\rho]&=\sum_{i=1}^m[\rho(x),\rho(x_i)\rho(y_i)]\\&=\sum_{i=1}^m([\rho(x),\rho(x_i)]\rho(y_i)+\rho(x_i)[\rho(x),\rho(y_i)])\\&=\sum_{i,l=1}^m(a_{li}\rho(x_l)\rho(y_i)-a_{il}\rho(x_i)\rho(y_l))\\&=0.\end{aligned}$$

因而(5)式成立.

若(ρ,V)不可约，则由 Schur 引理知

$$C_\rho=\lambda \cdot \mathrm{id}_V.$$

又

$$\lambda \cdot \dim V = \mathrm{tr} C_\rho = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}(\rho(x_i)\rho(y_i)) = \sum_{i=1}^{m} \beta_\rho(x_i, y_i) = \dim \mathfrak{g},$$

因而

$$C_\rho = \frac{\dim \mathfrak{g}}{\dim V}\, \mathrm{id}_V. \quad \blacksquare$$

注 1 由(4)式定义的 V 的线性变换 C_ρ 称为表示(ρ,V)的 **Casimir 算子**.

注 2 前面我们论证的表示都是忠实表示. 在一般情况,由于 $\mathrm{Ker}\rho$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,于是由 $\mathfrak{g}$ 的半单性知有理想 $\mathfrak{g}_1$ 使得 $\mathfrak{g}=\mathrm{Ker}\rho \oplus \mathfrak{g}_1$. 将 ρ 限制在 $\mathfrak{g}_1$ 上,则(ρ,V)是半单李代数 $\mathfrak{g}_1$ 的忠实表示. 我们以 $\rho|_{\mathfrak{g}_1}$的 Casimir 算子来做 ρ 的 Casimir 算子,此时,(5)式仍然成立.

注 3 如果 $\mathfrak{g}$ 是复单李代数,对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根子空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

取 $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Delta$,使得 $B(e_\alpha, e_{-\alpha})=1$. 在 $\mathfrak{h}$ 中取基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得 $B(x_i, x_j)=\delta_{ij}$,则由定理 6. 1. 2 知对 $\mathfrak{g}$ 的任何忠实表示(ρ,V),均有

$$C_\rho = \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\rho(x_i) + \sum_{\alpha \in \Delta} \rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha}) \Big),$$

这里 $\lambda \in \boldsymbol{C}$,与表示 ρ 有关.

例 6. 1. 1 设 $\mathfrak{g}=sl(2,\boldsymbol{C}), V=\boldsymbol{C}^2, \rho=\mathrm{id}$. 又令

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

则

$$C_\rho = XY+YX+\frac{1}{2}H^2 = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

这里

$$3/2=\dim\mathfrak{g}/\dim V.$$

引理 6.1.3 设(ρ,V)是复半单李代数$\mathfrak{g}$的表示，则有$\rho(\mathfrak{g})\subseteq sl(V)$. 特别，$\mathfrak{g}$的一维表示$(\rho,V)$必为平凡表示，即$\rho(X)=0$, $\forall X\in\mathfrak{g}$.

证 因为$\mathrm{tr}([\rho(x),\rho(y)])=0$；$\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，于是

$$\rho(\mathfrak{g})=[\rho(\mathfrak{g}),\rho(\mathfrak{g})]\subseteq sl(V).$$

由于当$\dim V=1$时，$\mathrm{tr}\rho(X)=0$当且仅当$\rho(X)=0$，故$\mathfrak{g}$的一维表示必为平凡表示. ▌

复半单李代数$\mathfrak{g}$的有限维表示的完全可约性首先由 H. Weyl 得到. 复半单李代数的表示可以转化为紧致半单李代数的表示，再转化为紧致半单李群的表示. H. Weyl 利用紧致李群上的不变积分定义表示空间上的不变内积，用不变内积的正交性即可证明表示的完全可约性.

但我们在这里给出的证明是纯代数的证明，容易看出所得的结果是可以推广的(例如特征为零的代数封闭域上的半单李代数的表示). 这个证明是由 J.-P. Serre 给出的.

以下我们均用模的语言来代替表示的语言.

引理 6.1.4 设W是复半单李代数$\mathfrak{g}$-模V的一个非平凡子模. 令

$$E_0=\{\mathscr{A}\in\mathrm{Hom}(V,W)\,\big|\,\mathscr{A}|_W=0\},$$

$$E_1=\{\mathscr{A}\in\mathrm{Hom}(V,W)\,\big|\,\mathscr{A}|_W=\lambda\cdot\mathrm{id}_W,\lambda\in\boldsymbol{C}\},$$

则E_0,E_1都是$\mathfrak{g}$-模$\mathrm{Hom}(V,W)$的子模. 若有$\pi\in E_1$，使得

$$x\cdot\pi=0,\quad\forall x\in\mathfrak{g};\tag{6}$$

$$\pi|_W=\mathrm{id}_W.\tag{7}$$

则有V的子模W_1使得

$$V=W\dotplus W_1.$$

证 设$x\in\mathfrak{g}$，$\mathscr{A}\in E_1$，$w\in W$. 于是由$\mathfrak{g}$-模$\mathrm{Hom}(V,W)$的定

义知

$$(x\cdot\mathscr{A})(v)=x\cdot(\mathscr{A}v)-\mathscr{A}(x\cdot v)$$
$$=\lambda xv-\lambda x\cdot v=0,$$

即 $x\cdot\mathscr{A}|_W=0$. 所以 $x\cdot\mathscr{A}\in E_0\subseteq E_1$. 因而 E_0,E_1 都是 $\mathrm{Hom}(V,W)$的子模，且 $x\cdot E_1\subseteq E_0$.

设 $\pi\in E_1$ 满足(6),(7),即有

$$\pi(V)=W,$$

且

$$x\cdot(\pi(v))=\pi(x\cdot v),\quad \forall v\in V,x\in\mathfrak{g}.$$

也就是 π 是 $\mathfrak{g}$-模 V 到 $\mathfrak{g}$-模 W 的满同态，因而 $W_1=\mathrm{Ker}\pi$ 也是 V 的子模. 显然，$W_1\cap W=\{0\}$，故

$$V=W\dotplus W_1. \quad \blacksquare$$

从引理 6.1.4 的证明可以看出，欲求 W 的补子模 W_1，只要找出 π 来. 而$\{\lambda\pi\mid\lambda\in\mathbf{C}\}$是 E_1 的一个子模，而且 $E_1=E_0\dotplus\{\lambda\pi\mid\lambda\in\mathbf{C}\}$，$E_0$ 是 E_1 的余维数为 1 的子模. 因而问题化为求 $\mathfrak{g}$-模 E_1 的余维数为 1 的子模 E_0 的补子模的问题.

引理 6.1.5 设 W 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$-模 V 的子模且 $\mathrm{codim}W=1$，则有 V 的子模 W_1 使得

$$V=W\dotplus W_1.$$

此时，$\dim W_1=1$. W_1 与 $\mathfrak{g}$-模 $\mathbf{C}$ 同构.

证 首先假设 W 是不可约子模，以 C 表示 $\mathfrak{g}$-模 V 的 Casimir 算子. 由于 $\mathrm{codim}W=1$，故 V/W 是 1 维 $\mathfrak{g}$-模. 由引理 6.1.3 知，$\forall v\in V,x\cdot v\in W$. 特别 $C(v)\in W$. 又由 W 是不可约的知，$C|_W=\frac{\dim\mathfrak{g}}{\dim W}\mathrm{id}_W\neq0$，于是 $C(V)=W,C(W)=W$. 又

$$Cx\cdot v=x\cdot Cv,\quad \forall x\in\mathfrak{g},v\in V.$$

故 C 是 $\mathfrak{g}$-模 V 到 $\mathfrak{g}$-模 W 的满同态. 因此 $\mathrm{Ker}C$ 为 V 的子模，且 $W\cap\mathrm{Ker}C=\{0\}$. 故

$$V=W\dotplus\mathrm{Ker}C.$$

一般情形，我们对 $\dim W$ 作归纳证明．若 $\dim W=1$，由 $\operatorname{codim} W=1$ 知，$\dim V=2$．而且 $W, V/W$ 都是一维平凡 $\mathfrak{g}$-模，故

$$x_1 x_2 v=0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathfrak{g}, v \in V.$$

因而 $[x_1, x_2] v=0$．由 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$ 知 V 为平凡 $\mathfrak{g}$-模，故有 V 的子模 W_1 使 $V=W \dotplus W_1$．

设 $\dim W \leqslant m-1$，$\operatorname{codim} W=1$ 时，结论已成立．现设 $\dim W=m$．若 W 不可约，前面已经证明，故不妨设 W 是可约的，W_2 为 W 的不可约子模．于是 $\dim W>\dim W_2>0$．显然，

$$\dim W/W_2<\dim W.$$

又 W/W_2 是 $\mathfrak{g}$-模 V/W_2 的子模，且 W/W_2 在 V/W_2 中的余维数 $\operatorname{codim} W/W_2=\operatorname{codim} W=1$．因而在 V/W_2 中有子模 V_1/W_2 使得

$$V/W_2=W/W_2 \dotplus V_1/W_2,$$

其中 V_1 是 V 的子模，且 $V_1 \supseteq W_2$，$V_1 \cap W=W_2$．

由于 $\dim V_1/W_2=1$，故 W_2 在 V_1 中的余维数为 1．故有 V_1 的一维子模 W_1 使得 $V_1=W_2 \dotplus W_1$．显然，$W_1 \cap W=\{0\}$，故

$$V=W \dotplus W_1.$$

至此，我们完成了引理 6.1.5 的证明． ▌

定理 6.1.6（H. Weyl） 复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的任何有限维表示（$\mathfrak{g}$-模）都是完全可约的．

证 设 W 是 $\mathfrak{g}$-模 V 的一个非平凡子模，即 $V \supset W \supset \{0\}$．又设 E_0, E_1 如引理 6.1.4 所述，故 E_0, E_1 都是 $\mathfrak{g}$-模，且 E_0 在 E_1 中的余维数为 1．由引理 6.1.5 知，有 E_1 的一维子模 E_2，使得

$$E_1=E_0 \dotplus E_2.$$

因为 $\dim E_2=1$，故 $x \cdot \mathscr{A}=0$，$\forall \mathscr{A} \in E_2, x \in \mathfrak{g}$．又

$$\mathscr{A}|_W=\lambda \mathrm{id}_W, \quad \mathscr{A} \in E_1, \lambda \in \boldsymbol{C}.$$

若 $\mathscr{A} \overline{\in} E_0$ 时，$\lambda \neq 0$．取 $\mathscr{A} \in E_2$，$\mathscr{A} \neq 0$．令

$$\pi=\frac{1}{\lambda} \mathscr{A},$$

则 π 满足条件(6)，(7)．由引理 6.1.3 知，有 W 的补子模 W_1，即 V

$=W\dot{+}W_1$. 故 V 是完全可约的. ▌

习　　题

1. 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单李代数. $B(x,y)$是 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型, $U(\mathfrak{g})$为 $\mathfrak{g}$ 的通用包络代数. 又 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的基, 满足

$$B(x_i,y_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant m.$$

称 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为**对偶基**. 试证

1) 若 $x_1',x_2',\cdots,x_m'$ 与 $y_1',y_2',\cdots,y_m'$ 也为对偶基, 则

$$\sum_{i=1}^{m}x_iy_i=\sum_{i=1}^{m}x_i'y_i'\in U(\mathfrak{g});$$

2) 若(ρ,V)是 $\mathfrak{g}$ 的表示, 则(ρ,V)可定义为 $U(\mathfrak{g})$的表示, 且

$$\rho(x)\rho\Big(\sum_{i=1}^{m}x_iy_i\Big)=\rho\Big(\sum_{i=1}^{m}x_iy_i\Big)\rho(x),\quad \forall\, x\in\mathfrak{g}.$$

称 $C_{\mathfrak{g}}=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**通用 Casimir 元素**.

2. 设 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha;$$

$e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha\in\Delta$, 满足 $B(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$; $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $\mathfrak{h}$ 的基, 满足 $B(x_i,x_j)=\delta_{ij}$. 试求 $\mathfrak{g}$ 的通用 Casimir 元素 $C_{\mathfrak{g}}$.

3. 设 $\mathfrak{r}$ 为复李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基. 若 $\mathfrak{r}=C(\mathfrak{g})$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为**约化李代数**. 试证

1) 若$(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$是 $\mathfrak{g}$ 的完全可约表示, 则 $\mathfrak{g}$ 为约化李代数;

2) 若 $\mathfrak{g}$ 是约化李代数, 则

$$\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})\oplus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\ \mathfrak{g}^{(1)}半单或\ \mathfrak{g}^{(1)}=\{0\};$$

3) 若 $\mathfrak{g}$ 为约化李代数, 则$(\mathrm{ad},\mathfrak{g})$为 $\mathfrak{g}$ 的完全可约表示.

§2　复半单李代数的不可约表示

由于复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示(ρ,V)是完全可约的, 故

V 可分解为 $\mathfrak{g}$ 的不可约不变子空间的直和：

$$V=V_1\dotplus V_2\dotplus\cdots\dotplus V_k.$$

对 V_i，由

$$\rho_i(x)=\rho(x)|_{V_i},\quad x\in\mathfrak{g}$$

可得到 $\mathfrak{g}$ 的一个不可约表示(ρ_i,V_i). 记

$$\rho=\rho_1\dotplus\rho_2\dotplus\cdots\dotplus\rho_k,$$

并称 ρ 为表示 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_k$ 的**直和**. 复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示归结为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示.

设 $\mathfrak{g}$ 对其 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha,\tag{1}$$

仍以(x,y)表示 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 用 Killing 型可将 $\mathfrak{h}^*$ 与 $\mathfrak{h}$ 等同起来.

又设(ρ,V)是 $\mathfrak{g}$ 的一个有限维表示，于是由引理 3.1.2，V 对 $\mathfrak{h}$ 有权子空间分解

$$V=\sum_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda,\tag{2}$$

其中 Λ 为权系，V_λ 为属于权 λ 的权子空间，即

$$V_\lambda=\{v\in V\,|\,(\rho(h)-(\lambda,h)\mathrm{id}_V)^k v=0, h\in\mathfrak{h}, k\in\mathbf{Z}_+\}.$$

我们知道还有下面性质：

$$\rho(e_\alpha)V_\lambda\subseteq V_{\lambda+\alpha},\quad \alpha\in\Delta,\quad \sum_{\lambda\in\Lambda}\dim V_\lambda\cdot(\lambda,h)=0.$$

我们称 $\dim V_\lambda$ 为权 λ 在表示(ρ,V)中的**重数**，记为 $m_\lambda(\rho)$或 m_λ.

引理 6.2.1 设(ρ,V)为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示. $\mathfrak{g}$，V 对 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数的分解分别为(1)，(2). 则下面结论成立：

1) $\lambda\in\Lambda, v\in V_\lambda$，则

$$\rho(h)v=(\lambda,h)v,\quad \forall h\in\mathfrak{h};$$

2) $\lambda\in\Lambda,\alpha\in\Delta$，则

$$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z},$$

即 $\lambda\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$;

3) $\lambda\in\Lambda, W$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群,则

$$w(\lambda)\in\Lambda,\quad \forall w\in W.$$

证 1) 结论 1)等价于 $\forall h\in\mathfrak{h},\rho(h)$是半单线性变换. 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为一素根系,于是 $\mathfrak{g}_i=\boldsymbol{C}\alpha_i+\mathfrak{g}_{\alpha_i}+\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$是 $\mathfrak{g}$ 的 3 维单子代数. 记 $\rho_i=\rho|_{\mathfrak{g}_i}$,则$(\rho_i,V)$是 $\mathfrak{g}_i$ 的表示. 于是由定理 6.1.6 知 V 有分解

$$V=U_1\dot{+}U_2\dot{+}\cdots\dot{+}U_t,$$

U_k 是 $\mathfrak{g}_i$ 的不可约不变子空间. 由定理 3.1.3 知 $\rho_i(\alpha_i)=\rho(\alpha_i)$在 U_k 上的限制是半单的. 故 $\rho(\alpha_i)$是 V 的半单线性变换,即在适当基下其矩阵为对角矩阵. 又由$[\rho(\alpha_i),\rho(\alpha_j)]=0,1\leqslant i,j\leqslant n$. 于是在 V 中存在基,在此基下 $\rho(\alpha_1),\rho(\alpha_2),\cdots,\rho(\alpha_n)$的矩阵均为对角矩阵. 若 $h\in\mathfrak{h}$,则有 $a_i\in\boldsymbol{C}$ 使得 $h=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\alpha_i$. $\rho(h)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\rho(\alpha_i)$ 在所取基下为对角矩阵,即 $\rho(h)$为半单线性变换,故结论 1)成立.

2) 取 $v_\lambda\in V_\lambda,v_\lambda\neq 0$. $k\in\boldsymbol{Z}_+$,令

$$v_k=\rho(e_\alpha)^k v_\lambda,\quad v_{-k}=\rho(e_{-\alpha})^k v_\lambda,$$

于是 $v_k\in V_{\lambda+k\alpha},v_{-k}\in V_{\lambda-k\alpha}$. 令

$$V_1=L(v_k,v_{-k},k\in\boldsymbol{Z}_+),$$

于是 V_1 是 3 维单子代数 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}=\boldsymbol{C}\alpha+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}$的不可约不变子空间. 由定理 3.1.3 知$\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\boldsymbol{Z}$.

3) 由定理 3.1.3 的证明知:

$$r_\alpha(\lambda)=\lambda-\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\in\Lambda,\quad \forall\alpha\in\Delta,\lambda\in\Lambda.$$

由于 W 由$\{r_\alpha|\alpha\in\Delta\}$生成,故结论 3)成立. ▌

引理 6.2.2 设 λ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示(ρ,V)的一个权, W 是 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群,则

$$m_\lambda(\rho)=m_{w(\lambda)}(\rho),\quad \forall w\in W.$$

证 设 Δ 为 $\mathfrak{g}$ 的根系. 任取 $\alpha\in\Delta$, 则 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}=C\alpha+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 3 维单子代数. 令 $\mathfrak{h}_0=\{h\in\mathfrak{h}\mid(\alpha,h)=0\}$, 于是 $\mathfrak{h}_0$ 为 $\mathfrak{h}$ 的子代数, 且

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_0+C\alpha,\quad [\mathfrak{h}_0,\mathfrak{g}^{(\alpha)}]=0.$$

V 作为 $\mathfrak{h}_0$-模有根子空间分解

$$V=\sum_{\mu\in\mathfrak{h}_0^*}V_\mu.$$

由于 $\rho(h)(\forall h\in\mathfrak{h})$ 均是半单的, 于是

$$V_\mu=\{v\in V\mid\rho(h_0)v=\mu(h_0)v,h_0\in\mathfrak{h}_0\}.$$

由于 $\forall x\in\mathfrak{g}^{(\alpha)},h_0\in\mathfrak{h}_0,v\in V_\mu$, 有

$$\rho(h_0)\rho(x)v=\rho(x)\rho(h_0)v=\mu(h_0)\rho(x)v,$$

故 $\rho(x)V_\mu\subseteq V_\mu$. 因而 V_μ 是 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模, 故可分解为不可约 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模的直和:

$$V_\mu=V_{\mu1}\dotplus V_{\mu2}\dotplus\cdots\dotplus V_{\mu s(\mu)}.$$

显然 $V_{\mu i}$ 中 $C\alpha$ 的每个权向量也是 $\mathfrak{h}$ 的权向量, 即有 $v\in V_\gamma\subseteq V_{\mu i}$, $\gamma\in(C\alpha)^*$, 则

$$\rho(h_0)v=\mu(h_0)v,\quad \rho(\alpha)v=\gamma(\alpha)v.$$

于是由 $h_0+a\alpha\to\mu(h_0)+a\gamma(\alpha)$ 确定 $\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}$ 中的一个元素. 于是 V 作为 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模有不可约子模分解:

$$V=V_1\dotplus V_2\dotplus\cdots\dotplus V_s.$$

由定理 3.1.3 知 V_i 的权子空间分解为

$$V_i=V_{\mu_i}\dotplus V_{\mu_i-\alpha}\dotplus\cdots\dotplus V_{\mu_i-m_i\alpha}$$

且

$$\mu_i-k\alpha\in\Delta_1,\quad \dim V_{\mu_i-k\alpha}=1,\quad 0\leqslant k\leqslant m_i.$$

由定理 3.1.3 的推论 2 知 $r_\alpha(\lambda)$ 也是 V_i 的一个权, 于是

$$\begin{aligned}m_\lambda(\rho)&=|\{V_i\mid\lambda\text{ 是 }V_i\text{ 的权}\}|\\&=|\{V_i\mid r_\alpha(\lambda)\text{是 }V_i\text{ 的权}\}|\\&=m_{r_\alpha(\lambda)}(\rho).\end{aligned}$$

由于 $\{r_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$ 生成 W, 于是引理 6.2.2 成立. ▌

定义 6.2.1 设 λ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ρ,V) 的一个权，α 是 $\mathfrak{g}$ 的一个根. 若有非负整数 p,q 使得

$$\lambda-p\alpha,\lambda-(p-1)\alpha,\cdots,\lambda,\lambda+\alpha,\cdots,\lambda+q\alpha$$

均为 (ρ,V) 的权，而 $\lambda-(p+1)\alpha,\lambda+(q+1)\alpha$ 不是权，则称 $\{\lambda+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$ 为过 λ 的 **α-权链**.

引理 6.2.3 设 λ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ρ,V) 的权，α 是 $\mathfrak{g}$ 的根，过 λ 的 α-权链为 $\{\lambda+k\alpha\mid -p\leqslant k\leqslant q\}$，则

$$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q.$$

证 令 $\lambda_0=\lambda+q\alpha$. 由引理 6.2.2 与定理 3.1.3 知 $r_\alpha(\lambda_0)$ 也是权，且在过 λ_0 的 α-权链中. 又

$$r_\alpha(\lambda_0)=\lambda_0-\frac{2(\lambda_0,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,$$

故有
$$\frac{2(\lambda_0,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\leqslant p+q,$$

故
$$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\leqslant p-q.$$

令 $\lambda_1=\lambda-p\alpha$，$r_\alpha(\lambda_1)$ 在过 λ_1 的 α-权链中，由此知

$$-\frac{2(\lambda_1,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\leqslant p+q,$$

故
$$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\geqslant p-q.$$

因而
$$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q. \quad \blacksquare$$

设 Λ 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ρ,V) 对 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的权系. 由引理 6.2.1 知 $\Lambda\subseteq\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$. 在 $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 中取定基后，就可规定 $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 的字典序，于是 Λ 也是有序集.

定义 6.2.2 在 $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 给定的字典序下，若 $\lambda\in\Lambda$ 满足

$$\lambda>\mu,\quad \forall\mu\in\Lambda,\mu\neq\lambda,$$

则称 λ 为表示 (ρ,V) 的**首权**或**最高权**，V_λ 中非零元素 v_λ 称为**最高权向量**.

由于在 $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ 给定了字典序. 于是 $\mathfrak{g}$ 的根系 $\Delta=\Delta_+\cup\Delta_-$，其中

Δ_+，Δ_-分别为正根系与负根系，并确定了 Δ 的素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$.

显然，若 λ 为表示(ρ,V)的最高权，则

$$\lambda+\alpha\overline{\in}\Lambda,\quad \forall\alpha\in\Delta_+.$$

因而

$$\rho(e_\alpha)v_\lambda=0,\quad \forall\alpha\in\Delta_+,v_\lambda\in V_\lambda.$$

下面我们讨论复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示(ρ,V)的性质.

定理 6.2.4 设(ρ,V)是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示，Λ 为(ρ,V)的权系，λ 为最高权，则下面性质成立：

1) 设 $v_\lambda\in V_\lambda,v_\lambda\neq 0$，则 V 由形如

$$\rho(e_{-\alpha_{i_1}})\rho(e_{-\alpha_{i_2}})\cdots\rho(e_{-\alpha_{i_k}})v_\lambda,\quad \alpha_{i_j}\in\Pi$$

的元素线性生成；

2) $\dim V_\lambda=1$；

3) 设 $\mu\in\Lambda$，则在 Λ 中有权链

$$\lambda,\lambda-\alpha_{i_1},\lambda-\alpha_{i_1}-\alpha_{i_2},\cdots,\lambda-\alpha_{i_1}-\alpha_{i_2}-\cdots-\alpha_{i_s}=\mu;$$

4) 若 $\mu\in\Lambda,\alpha\in\Delta$，且 $\mu-\alpha\in\Lambda$，则

$$\rho(e_{-\alpha})V_\mu\neq\{0\};$$

5) $\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}_+,\quad \forall\alpha\in\Delta_+.$

证 1) 令

$$V_1=L\left\{\prod_{j=1}^{k}\rho(e_{-\alpha_{i_j}})v_\lambda\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}_+,\alpha_{i_j}\in\Pi\right\}.$$

显然，V_1 在 $\rho(h)(h\in\mathfrak{h})$，$\rho(e_{-\alpha_i})(\alpha_i\in\Pi)$下是不变的. 因为 λ 为最高权，故 $\lambda+\alpha_i$ 不是权. 因而 $\rho(e_{\alpha_i})v_\lambda=0$，即 $\rho(e_{\alpha_i})v_\lambda\overline{\in}V_1,\alpha_i\in\Pi$. 设 $k\in\mathbf{N}$，$\rho(e_{\alpha_i})\left(\prod_{j=1}^{k}\rho(e_{-\alpha_{i_j}})v_\lambda\right)\in V_1$，于是

$$\rho(e_{\alpha_l})\left(\prod_{j=1}^{k+1}\rho(e_{-\alpha_{i_j}})v_\lambda\right)$$

$$=([\rho(\alpha_l),\rho(e_{-\alpha_{i_1}})]+\rho(e_{-\alpha_{i_1}})\rho(e_{\alpha_l}))\prod_{j=2}^{k+1}\rho(e_{-\alpha_{i_j}})v_\lambda\in V_1.$$

因而 V_1 在 $\rho(e_{\alpha_l})(\alpha_l\in\Pi)$ 下不变. 由于 $\{\mathfrak{h},e_{\alpha_i},e_{-\alpha_i}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 生成 $\mathfrak{g}$, 故 V_1 是表示 (ρ,V) 的不变子空间. 再由 $V_1\neq\{0\}$, (ρ,V) 不可约, 故 $V_1=V$. 故结论 1) 成立.

2) 因为 $\prod\limits_{j=1}^{k}\rho(e_{-\alpha_{i_j}})v_\lambda\in V_{\lambda-\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_{i_j}}$, 故 $v\in V_\lambda$ 当且仅当 $v=cv_\lambda$, $c\in\boldsymbol{C}$. 故 $\dim V_\lambda=1$.

3) 设 $\mu\in\Lambda$, 于是有 $v_\mu\in V_\mu$, $v_\mu\neq 0$. 故

$$v_\mu=\sum_{i_1\cdots i_s}k_{i_1i_2\cdots i_s}\rho(e_{-\alpha_{i_s}})\rho(e_{-\alpha_{i_{s-1}}})\cdots\rho(e_{-\alpha_{i_1}})v_\lambda,$$

$$\mu=\lambda-\alpha_{i_1}-\cdots-\alpha_{i_s}.$$

于是有 $i_s,i_{s-1},\cdots,i_1$ 使得

$$\rho(e_{-\alpha_{i_s}})\rho(e_{-\alpha_{i_{s-1}}})\cdots\rho(e_{-\alpha_{i_1}})v_\lambda\neq 0,$$

故

$$\lambda,\lambda-\alpha_{i_1},\cdots,\lambda-\alpha_{i_1}-\cdots-\alpha_{i_s}=\mu$$

是 Λ 中权链.

4) 设 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}=\boldsymbol{C}\alpha+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}$, V 作为 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模, 则 $\mu-\alpha,\mu$ 在过 μ 的 α-权链

$$\mu-p\alpha,\cdots,\mu-\alpha,\mu,\cdots,\mu+q\alpha$$

中, 取 $v_{\mu+q\alpha}\in V_{\mu+q\alpha}$, $v_{\mu+q\alpha}\neq 0$. 令

$$V_1=L\{\rho(e_{-\alpha})^k v_{\mu+q\alpha}\mid k\in\boldsymbol{Z}_+\},$$

则 V_1 是不可约 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模, 且由 $r_\alpha(\mu+q\alpha)=\mu-p\alpha$, 知

$$V_1=\sum_{k=-p}^{q}V_{\mu+k\alpha}\cap V_1.$$

特别, $V_{\mu-\alpha}\cap V_1\neq\{0\}$, 因而

$$\rho(e_{-\alpha})V_\mu\neq\{0\}.$$

5) 设 $\alpha\in\Delta_+$. 考虑过 λ 的 α-权链

$$\lambda-p\alpha,\cdots,\lambda,\lambda+\alpha,\cdots,\lambda+q\alpha,$$

由于 λ 为最高权, 故 $\lambda+\alpha\overline{\in}\Lambda$, 即 $q=0$. 于是

$$\frac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p\in \mathbf{Z}_+. \quad \blacksquare$$

定理 6.2.5 设(ρ,V)与(ρ',V')都是复半单李代数$\mathfrak{g}$的不可约表示,则(ρ,V)与(ρ',V')为同构表示当且仅当它们的最高权相同.

证 设(ρ,V)与(ρ',V')为同构表示. ϕ为V到V'的线性同构,且

$$\rho'(x)\phi=\phi\rho(x), \quad \forall x\in\mathfrak{g}.$$

设V对$\mathfrak{g}$的 Cartan 子代数$\mathfrak{h}$的权子空间分解为

$$V=\sum_{\mu\in\Lambda}V_\mu,$$

于是,若$v\in V_\mu$,有

$$\rho'(h)(\phi v)=\phi(\rho(h)v)=(\mu,h)\phi v, \quad \forall h\in\mathfrak{h}.$$

故V'对$\mathfrak{h}$的权子空间分解为:

$$V'=\sum_{\mu\in\Lambda}\phi(V_\mu),$$

因而(ρ,V)与(ρ',V')有相同的权系,故有相同的最高权.

设(ρ,V)与(ρ',V')是有相同最高权的不可约表示. 令

$$U=V\dotplus V'=\{(v,v')\,|\,v\in V,v'\in V'\},$$

$$\varphi=\rho\dotplus\rho',$$

即

$$\varphi(x)(v,v')=(\rho(x)v,\rho'(x)v'), \quad \forall x\in\mathfrak{g}.$$

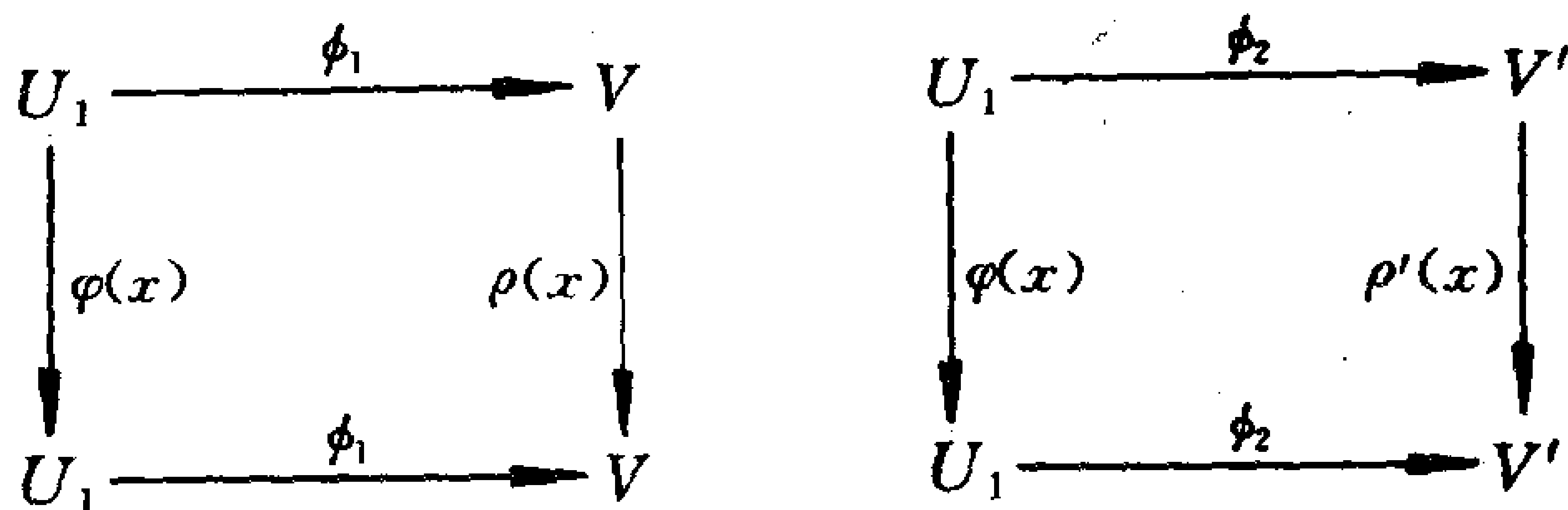
显然,(φ,U)是$\mathfrak{g}$表示. 我们分别以$\Lambda(\rho),\Lambda(\rho'),\Lambda(\varphi)$表示$(\rho,V)$, (ρ',V'), (φ,U)的权系. 又λ为$\Lambda(\rho),\Lambda(\rho')$的最高权,则$\lambda$也是$\Lambda(\varphi)$的最高权. 又$v_\lambda,v'_\lambda$分别为$V,V'$最高权向量,则$u_\lambda=(v_\lambda,v_\lambda')$为$U$的最高权向量. 令

$$U_1=L\{\varphi(e_{-\alpha_{i_1}})\cdots\varphi(e_{-\alpha_{i_s}})u_\lambda\,|\,\alpha_{i_j}\in\Pi\}.$$

则U_1是U的不可约子模,最高权为λ. 分别作U_1到V,V'的映射ϕ_1,ϕ_2为:

$$\phi_1(v,v')=v, \quad \phi_2(v,v')=v'.$$

由此得如下两图表：



于是有

$$\phi_1\varphi(x)=\rho(x)\phi_1,\quad \forall x\in\mathfrak{g};$$
$$\phi_2\varphi(x)=\rho'(x)\phi_2,\quad \forall x\in\mathfrak{g},$$

且有

$$\phi_1(U_1)=\{(v,0)\mid v\in V\},\quad \phi_2(U_1)=\{(0,v')\mid v'\in V'\};$$
$$\mathrm{Ker}\phi_1=U_1\cap\phi_2(U_1),\quad \mathrm{Ker}\phi_2=U_1\cap\phi_1(U_1).$$

这里$\{(0,v')\mid v'\in V'\}$，$\{(v,0)\mid v\in V\}$分别可与V'，V等同，仍记为V'，V. 又由V'是不可约的，故知$\mathrm{Ker}\phi_1=V'$或$\mathrm{Ker}\phi_1=\{0\}$. 但若$\mathrm{Ker}\phi_1=V'$，又$(0,v'_\lambda)\in U_1$，故由U_1不可约知

$$(0,v'_\lambda)=c(v_\lambda,v'_\lambda),$$

从而$c=0$. 这导出矛盾. 故$\mathrm{Ker}\phi_1=\{0\}$. 因而，U_1与V是同构的$\mathfrak{g}$-模. 同理，U_1与V'是同构的$\mathfrak{g}$-模，因而(ρ,V)与(ρ',V')是同构表示. ▌

注 在上面定理的必要性证明中并未用到(ρ,V)与(ρ',V')的不可约性，因而这实际上证明了同构表示的权系相同.

习 题

1. 设(ρ,V)是复半单李代数$\mathfrak{g}$的不可约表示，λ是最高权，v是最高权向量，α是一正根，过λ的α-权链为$\{\lambda-k\alpha\mid 0\leqslant k\leqslant p\}$. 试证

$$\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})^k v=C(k)\rho(e_{-\alpha})^{k-1}v,$$

并求$C(k)$.

2. 设(ρ,V)是复半单李代数$\mathfrak{g}$的有限维表示，对$\mathfrak{g}$的Cartan子代数$\mathfrak{h},\mathfrak{h}_1$的权系分别为$\Lambda,\Lambda_1$. 试证：

1) 存在$\theta\in\mathrm{Int}\mathfrak{g}$，$\mathscr{A}\in GL(V)$使得

$$\rho(\theta(x))\mathscr{A}=\mathscr{A}\rho(x),\quad \forall x\subseteq\mathfrak{g};$$

2) $\theta(\Lambda)=\Lambda_1$；

3) 若$V=\sum_{\mu\in\Lambda}V_\mu$是$V$对$\mathfrak{h}$的权子空间分解，则$V=\sum_{\mu\in\Lambda}\mathscr{A}(V_\mu)$是对$\mathfrak{h}_1$的权子空间分解，其中$\mathscr{A}(V_\mu)$是属于权$\theta(\mu)$的权子空间.

3. 设(ρ,V)为复半单李代数$\mathfrak{g}$的有限维表示，Λ为(ρ,V)的权系，(ρ^*,V^*)为(ρ,V)的对偶表示. 试证(ρ^*,V^*)的权系$\Lambda^*=-\Lambda$.

4. 设λ为复半单李代数$\mathfrak{g}$的表示(ρ,V)的最高权，$w_0\in W$使得$w_0(\Delta_+)=\Delta_-$. 试证$w_0(\lambda)$是(ρ,V)的**最低权**(即$w_0\lambda\leqslant\mu$，μ为权).

§3 重数公式

设(ρ,V)是复半单李代数$\mathfrak{g}$的不可约表示，Λ,λ分别为权系与最高权，$\mu\in\Lambda$，m_μ为μ的重数. 由于(ρ,V)由λ唯一决定，因而m_μ也依赖于λ. 本节将讨论这种关系.

设$\mathfrak{g}$对其Cartan子代数$\mathfrak{h}$的分解为

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha.$$

取$\alpha\in\Delta$，对于$\mathfrak{g}^{(\alpha)}=C\alpha+\mathfrak{g}_\alpha+\mathfrak{g}_{-\alpha}$，$V$也是$\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模. 于是$V$可以分解为不可约子$\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模的直和：

$$V=V_1\dotplus V_2\dotplus\cdots\dotplus V_s. \tag{1}$$

从引理6.2.2的证明知，每个V_i均可取成$\mathfrak{h}$-模，即V_i中对于$C\alpha$的权向量也是对于$\mathfrak{h}$的权向量. 又V_i中每个权子空间的维数都是

1 维的，于是

$$m_\mu = |\{V_i \mid \mu \text{是}(\mathfrak{h}+\mathfrak{g}^{(\alpha)})\text{-模} V_i \text{的权}\}|.$$

以 v_i 表示 V_i 作为 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模的最高权向量，设 $v_i \in V_{\lambda_i}$，于是 μ 为 V_i 的权，必有 $k_i \in \mathbf{Z}_+$ 使得 $\mu = \lambda_i - k_i\alpha$.

另一方面，设 (x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 $\mathfrak{h}$ 的基；$e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Delta$，使得 $(x_i, x_j) = \delta_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$；$(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. 令

$$C_\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)\rho(x_i) + \sum_{\alpha \in \Delta} \rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha}),$$

容易证明（参看第六章 §1 的习题 1）

$$C_\rho \rho(x) = \rho(x) C_\rho, \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

故由 Schur 引理知有常数 $c \in \mathbf{C}$，使得

$$C_\rho = c \cdot \mathrm{id}_V,$$

于是

$$\mathrm{tr}(C_\rho|_{V_\mu}) = c \cdot m_\mu.$$

因此，欲求 m_μ，只要知道 C_ρ 在 V_μ 上的作用及 c 就可以了.

以下进行具体的讨论.

引理 6.3.1 设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ρ, V) 作为 $\mathfrak{h}+\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模有不可约子模分解(1). 又设 v_i 是 V_i 的最高权向量，对应的权为 λ_i.

1) 令 $N(\alpha) = L(v_1, v_2, \cdots, v_s)$，则

$$N(\alpha) = \{v \in V \mid \rho(e_\alpha)v = 0\},$$

且 $N(\alpha)$ 是 $\mathfrak{h}$-模，满足

$$N(\alpha) = \sum_{\mu \in \Lambda} V_\mu \cap N(\alpha),$$

$$N(\alpha)_\mu = V_\mu \cap N(\alpha) = L(\{v_i \mid \lambda_i = \mu\}).$$

2) 若 $N(\alpha)_\mu \neq \{0\}$，则 $p = \dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbf{Z}_+$，且

$$\dim \rho(e_{-\alpha})^k N(\alpha)_\mu = \begin{cases} \dim N(\alpha)_\mu, & 0 \leqslant k \leqslant p; \\ 0, & k > p. \end{cases} \tag{2}$$

又当 $0 \leqslant k \leqslant p-1$ 时，对 $v \in N(\alpha)_\mu$，有

$$\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})(\rho(e_{-\alpha})^k v)=\frac{1}{2}(k+1)(p-k)(\alpha,\alpha)\rho(e_{-\alpha})^k v, \quad (3)$$

$\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})$在 $\rho(e_{-\alpha})^k N(\alpha)_\mu$ 上的限制是其可逆线性变换.

证 固定一个 V_i,则 V_i 有基

$$v_i,\rho(e_{-\alpha})v_i,\cdots,\rho(e_{-\alpha})^{p_i}v_i,$$

其中

$$p_i=2(\lambda_i,\alpha)/(\alpha,\alpha).$$

当 $0\leqslant k\leqslant p_i-1$ 时,由定理 3.1.3 的证明知

$$\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})^k v_i=\frac{k}{2}(p_i-k+1)\rho(e_{-\alpha})^{k-1}v_i.$$

由于 v_i 是不可约 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模 V_i 的最高权向量,故 $\rho(e_\alpha)v_i=0$. 从而有 $\rho(e_\alpha)N(\alpha)=0$.

反之,若 $v\in V$,$\rho(e_\alpha)v=0$,则有 $x_{ik_i}\in\boldsymbol{C}$ 使得

$$v=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k_i=0}^{p_i}x_{ik_i}\rho(e_{-\alpha})^{k_i}v_i,$$

故

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{k_i=1}^{p_i}\frac{1}{2}k_i(p_i-k_i+1)x_{ik_i}\rho(e_{-\alpha})^{k_i-1}v_i=0.$$

于是

$$\frac{1}{2}k_i(p_i-k_i+1)x_{ik_i}=0, \quad 1\leqslant k_i\leqslant p_i,$$

即

$$x_{ik_i}=0, \quad 1\leqslant k_i\leqslant p_i.$$

因而

$$v=\sum_{i=1}^{s}x_{i0}v_i\in N(\alpha),$$

故

$$N(\alpha)=\{v\in V\mid\rho(e_\alpha)v=0\}.$$

由于 $v_i\in V_{\lambda_i}$,故 $N(\alpha)$是 $\mathfrak{h}$-模,于是

$$N(\alpha)=\sum_{\mu\in\Lambda}V_\mu\cap N(\alpha),$$

$$N(\alpha)_\mu=V_\mu\cap N(\alpha)=L(\{v_i\mid\lambda_i=\mu\}).$$

至此证明了结论 1)成立.

2) 若 $N(\alpha)_\mu \neq \{0\}$，故有 $\lambda_i=\mu$，于是

$$p=\frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=\frac{2(\lambda_i,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p_i\in \mathbf{Z}_+.$$

此时

$$\rho(e_{-\alpha})^k N(\alpha)_\mu=L(\{\rho(e_{-\alpha})^k v_i \mid \lambda_i=\mu\}).$$

当 $0\leqslant k\leqslant p$ 时，$\{\rho(e_{-\alpha})^k v_i \mid \lambda_i=\mu\}$ 是线性无关的，而 $k>p$ 时，$\rho(e_{-\alpha})^k v_i=0$，故(2)式成立.

当 $0\leqslant k\leqslant p-1$ 时，(3)式对每个 $v_i(\lambda_i=\mu)$ 成立，于是对 $\forall v\in N(\alpha)_\mu$，(3)式也成立.

于是结论 2)成立. ▌

为方便起见，令

$$n_\mu=\dim N(\alpha)_\mu,$$

于是

$$n_\mu=|\{\lambda_i \mid \lambda_i=\mu\}|.$$

引理 6.3.2 设 $\mu\in\Lambda$，$\alpha\in\Delta$，而 $\mu+\alpha\overline{\in}\Lambda$，则下面结果成立：

1) $m_{\mu-k\alpha}=n_\mu+n_{\mu-\alpha}+\cdots+n_{\mu-k\alpha}$, $\quad 0\leqslant k\leqslant\dfrac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$;

2) $V_{\mu-k\alpha}=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\rho(e_{-\alpha})^{k-j}N(\alpha)_{\mu-j\alpha}$;

3) $n_{\mu-k\alpha}=m_{\mu-k\alpha}-m_{\mu-(k-1)\alpha}$.

证 V_i 的权链 $\{\lambda_i-k\alpha \mid 0\leqslant k\leqslant p_i\}$ 是关于

$$\lambda_i-\frac{p_i}{2}\alpha=\lambda_i-\frac{(\lambda_i,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

对称的.

当 $\lambda_i=\mu$ 时，权链的对称中心为 $\mu-\dfrac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$.

当 $\lambda_i=\mu-k\alpha$，$0\leqslant k\leqslant\dfrac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ 时，权链的对称中心为

$$\mu-k\alpha-\frac{(\mu-k\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\mu-\frac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

于是，当 $\lambda_i=\mu,\mu-\alpha,\cdots,\mu-k\alpha$ 时，V_i 的权链可排列如下表：

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\mu & \cdots & \mu & & & & & & & & & \\
\mu-\alpha & \cdots & \mu-\alpha & \mu-\alpha & \cdots & \mu-\alpha & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots\cdots & & & & & \\
\mu-k\alpha & \cdots & \mu-k\alpha & \mu-k\alpha & \cdots & \mu-k\alpha & \cdots\cdots & & \mu-k\alpha & \cdots & \mu-k\alpha & \\
\end{array}$$

$$\mu-\frac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \quad \text{—————}\cdot\text{—————}\cdot\text{—————}\cdot\text{—————}\cdot\text{———}$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots\cdots & & \underbrace{\qquad\qquad}_{n_{\mu-k\alpha}} & \\
\underbrace{\mu-p\alpha \quad \cdots \quad \mu-p\alpha}_{n_\mu} & & & \underbrace{\mu-(p-1)\alpha \quad \cdots \quad \mu-(p-1)\alpha}_{n_{\mu-\alpha}} & & & & & &
\end{array}$$

由此可知

$$m_{\mu-k\alpha}=n_\mu+n_{\mu-\alpha}+\cdots+n_{\mu-k\alpha}, \quad 0\leqslant k\leqslant\frac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)},$$

即结论 1)成立.

结论 2)与结论 3)是结论 1)的必然结果. ▌

引理 6.3.3 设 $\mu\in\Lambda,\alpha\in\Delta$. 又知过 μ 的 α-权链为 $\{\mu+k\alpha \mid -p\leqslant k\leqslant q\}$，则

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha)=0.$$

又若 $\mu+\alpha\overline{\in}\Lambda$，即 $q=0$，则当 $0\leqslant k\leqslant\frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$时，

$$\operatorname{tr}(\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})|_{V_{\mu-k\alpha}})=\sum_{j=0}^{k}(\mu-j\alpha,\alpha)m_{\mu-j\alpha}.$$

证 当 $j>q$ 或 $j<-p$ 时，$\mu+j\alpha\overline{\in}\Lambda$，因而有 $m_{\mu+j\alpha}=0$，于是

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha)=\sum_{j=-p}^{q} m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha).$$

令

$$U=\sum_{j=-p}^{q} V_{\mu+j\alpha}.$$

故 U 是 $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$-模，由此有 $\operatorname{tr}(\rho(\alpha)|_U)=0$. 所以

$$\sum_{j=-p}^{q} m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha)=0.$$

现设 $q=0, 0\leqslant k\leqslant\frac{(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. 由引理 6.3.2 知

$$V_{\mu-k\alpha}=\sum_{j=0}^{k}\rho(e_{-\alpha})^{k-j}N(\alpha)_{\mu-j\alpha}.$$

由(3)式知，$\forall v\in\rho(e_{-\alpha})^{k-j}N(\alpha)_{\mu-j\alpha}$有

$$\begin{aligned}\rho(e_{\alpha})\rho(e_{-\alpha})v&=\frac{1}{2}(k-j+1)\left(\frac{2(\mu-j\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}-(k-j)\right)(\alpha,\alpha)v\\&=(k-j+1)\left(\mu-j\alpha-\frac{1}{2}(k-j)\alpha,\alpha\right)v,\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}(\rho(e_{\alpha})\rho(e_{-\alpha})|_{V_{\mu-k\alpha}})\\&\quad=\sum_{j=0}^{k}n_{\mu-j\alpha}(k-j+1)\left(\mu-j\alpha-\frac{1}{2}(k-j)\alpha,\alpha\right).\end{aligned}$$

再由引理 6.3.2 的结论 3)可得

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}(\rho(e_{\alpha})\rho(e_{-\alpha})|_{V_{\mu-k\alpha}})\\&\quad=\sum_{j=0}^{k}(m_{\mu-j\alpha}-m_{\mu-(j-1)\alpha})(k-j+1)\left(\mu-j\alpha-\frac{1}{2}(k-j)\alpha,\alpha\right)\\&\quad=\sum_{j=0}^{k}(\mu-j\alpha,\alpha)m_{\mu-j\alpha}.\end{aligned}$$

现设$(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)<k\leqslant 2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)=p$. 令

$$\mu'=r_{\alpha}(\mu)=\mu-\frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\mu-p\alpha,$$

$$\alpha'=r_{\alpha}(\alpha)=-\alpha.$$

于是对于 $0\leqslant k'\leqslant p/2$，有

$$\operatorname{tr}(\rho(e_{\alpha'})\rho(e_{-\alpha'})|_{V_{\mu'-k'\alpha'}})=\sum_{j=0}^{k'}(\mu'-j\alpha',\alpha')m_{\mu'-j'\alpha'}.$$

而

$$\mu'-k'\alpha'=\mu-p\alpha+k'\alpha=\mu-(p-k')\alpha,$$
$$\mu'-j\alpha'=\mu-p\alpha+j\alpha=\mu-(p-j)\alpha.$$

故

$$\operatorname{tr}(\rho(e_{-\alpha})\rho(e_{\alpha})|_{V_{\mu-(p-k')\alpha}})=-\sum_{j=0}^{k'}(\mu-(p-j)\alpha,\alpha)m_{\mu-(p-j)\alpha}$$

$$= -\sum_{j=p-k'}^{p}(\mu - j\alpha, \alpha)m_{\mu - j\alpha}.$$

由 $0 \leqslant k' \leqslant p/2$,故 $p/2 \leqslant p-k' \leqslant p$. 设 $k=p-k'$,于是

$$\operatorname{tr}(\rho(e_{-\alpha})\rho(e_\alpha)|_{V_{\mu-k\alpha}}) = -\sum_{j=k}^{p}(\mu - j\alpha, \alpha)m_{\mu - j\alpha}.$$

又由

$$\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha}) = \rho(e_{-\alpha})\rho(e_\alpha) + \rho(\alpha),$$

$$\operatorname{tr}(\rho(\alpha)|_{V_{\mu-k\alpha}}) = m_{\mu-k\alpha}(\mu - k\alpha, \alpha),$$

$$\sum_{j=-p}^{0}(\mu + j\alpha, \alpha)m_{\mu+j\alpha} = 0$$

得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}(\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})|_{V_{\mu-k\alpha}}) \\
&= -\sum_{j=k}^{p}(\mu - j\alpha, \alpha)m_{\mu-j\alpha} + (\mu - k\alpha, \alpha)m_{\mu-k\alpha} \\
&\quad + \sum_{j=-p}^{0}(\mu + j\alpha, \alpha)m_{\mu+j\alpha} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(\mu - j\alpha, \alpha)m_{\mu-j\alpha}.
\end{aligned}$$

引理 6.3.3 得证. ▌

推论 设 $\mu \in \Lambda, \alpha \in \Delta$,则

$$\operatorname{tr}(\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})|_{V_\mu}) = \sum_{j=0}^{\infty}(\mu + j\alpha, \alpha)m_{\mu+j\alpha}.$$

证 显然,右边是有限和. 设过 μ 的 α-权链为 $\{\mu+k\alpha \mid -p \leqslant k \leqslant q\}$. 令 $\mu' = \mu + q\alpha$,于是 $\mu' + \alpha \overline{\in} \Lambda$,且有

$$\frac{2(\mu', \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = p + q.$$

又 $\mu = \mu' - q\alpha$,于是

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})|_{V_\mu}) &= \sum_{j=0}^{q}(\mu' - j\alpha, \alpha)m_{\mu'-j\alpha} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(\mu + j\alpha, \alpha)m_{\mu+j\alpha}.
\end{aligned}$$ ▌

最后，我们导出不可约表示的重数公式.

定理 6.3.4 设(ρ, V)是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示，Λ 为其权系，λ 为最高权. 又令 $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$. 若 $\mu\in\Lambda$，则

$$
\begin{aligned}
&((\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta))m_\mu \\
&= 2\sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{j=1}^{\infty} m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha).
\end{aligned}
$$

（**注** 此公式称为 H. Freudenthal **重数公式**.）

证 在 $\mathfrak{h}$ 中取基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使$(x_i, x_j)=\delta_{ij}$. 取 $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，使$(e_\alpha, e_{-\alpha})=1$，$\alpha\in\Delta$. 于是

$$
C_\rho = \sum_{i=1}^{n}\rho(x_i)\rho(x_i) + \sum_{\alpha\in\Delta}\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha}) = c\cdot \mathrm{id}_V.
$$

注意到 $\rho(x_i)$，$\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})$都使 V_μ 不变，故

$$
cm_\mu = \mathrm{tr}\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i)\rho(x_i)|_{V_\mu}\Big) + \mathrm{tr}\Big(\sum_{\alpha\in\Delta}\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})|_{V_\mu}\Big).
$$

下面分别计算等式右端的两项.

$$
\mathrm{tr}\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i)\rho(x_i)|_{V_\mu}\Big) = m_\mu\sum_{i=1}^{n}(\mu, x_i)(\mu, x_i) = m_\mu(\mu,\mu),
$$

$$
\mathrm{tr}(\rho(e_\alpha)\rho(e_{-\alpha})|_{V_\mu}) = \sum_{j=0}^{\infty}(\mu+j\alpha,\alpha)m_{\mu+j\alpha},
$$

于是

$$
(c-(\mu,\mu))m_\mu = \sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{j=0}^{\infty}m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha).
$$

又由于

$$
m_{\mu+0\cdot\alpha}(\mu+0\cdot\alpha,\alpha)+m_{\mu+0\cdot(-\alpha)}(\mu+0\cdot(-\alpha),-\alpha)=0,
$$

故

$$
(c-(\mu,\mu))m_\mu = \sum_{\alpha\in\Delta}\sum_{j=1}^{\infty}m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha).
$$

又

$$
\sum_{j=-\infty}^{+\infty} m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha) = 0,
$$

于是

$$\sum_{j=-\infty}^{0} m_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha,\alpha) = -\sum_{j=1}^{\infty} m_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha,\alpha).$$

若 $\alpha\in\Delta_-$,则 $-\alpha\in\Delta_+$,且

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha,\alpha) = m_\mu(\mu, -\alpha) + \sum_{j_1=1}^{\infty} m_{\mu+j_1(-\alpha)}(\mu + j_1(-\alpha), -\alpha).$$

由此可知

$$(c - (\mu,\mu))m_\mu = \sum_{\alpha\in\Delta_+}(\mu,\alpha)m_\mu + 2\sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{j=1}^{\infty} m_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha,\alpha),$$

故有

$$(c - (\mu + 2\delta,\mu))m_\mu = 2\sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{j=1}^{\infty} m_{\mu+j\alpha}(\mu + j\alpha,\alpha).$$

下面确定常数 c. 取 $\mu=\lambda$,则 $m_\lambda=1, m_{\mu+j\alpha}=0$,因而

$$c-(\lambda+2\delta,\lambda)=0,$$

$$c=(\lambda+2\delta,\lambda)=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta).$$

故

$$\begin{aligned}c-(\mu+2\delta,\mu)&=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta)+(\delta,\delta)\\&=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\mu+\delta,\mu+\delta).\end{aligned}$$

由此可知重数公式成立. ▌

此公式实际是重数的一个递推公式.

习　题

1. 设 $\mathfrak{g}=sl(3,\boldsymbol{C})$, $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 为其素根系, (ρ,V) 是一个不可约表示, λ 为最高权.

1) 若 $2(\lambda,\alpha_1)/(\alpha_1,\alpha_1)=1$, $2(\lambda,\alpha_2)/(\alpha_2,\alpha_2)=0$. 试求此不可约表示的权系 Λ 及 m_μ, $\mu\in\Lambda$.

2) 若 $2(\lambda,\alpha_1)/(\alpha_1,\alpha_1)=1$, $2(\lambda,\alpha_2)/(\alpha_2,\alpha_2)=3$. 试求此不可约表示的权系 Λ 及 m_μ, $\mu\in\Lambda$.

2. 设 $\mathfrak{g}=G_2$, $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, α_1 为短根,不可约表示 (ρ,V) 的权

系为 Λ,λ 为最高权.

1) 若 $2(\lambda,\alpha_1)/(\alpha_1,\alpha_1)=1, 2(\lambda,\alpha_2)/(\alpha_2,\alpha_2)=0$,求 $m_\mu,\mu\in\Lambda$;

2) 若 $2(\lambda,\alpha_1)/(\alpha_1,\alpha_1)=0, 2(\lambda,\alpha_2)/(\alpha_2,\alpha_2)=1$,求 $m_\mu,\mu\in\Lambda$;

3) 若 $2(\lambda,\alpha_1)/(\alpha_1,\alpha_1)=2, 2(\lambda,\alpha_2)/(\alpha_2,\alpha_2)=0$,求 $m_\mu,\mu\in\Lambda$;

4) 若 $2(\lambda,\alpha_1)/(\alpha_1,\alpha_1)=2(\lambda,\alpha_2)/(\alpha_2,\alpha_2)=1$,求 $m_\mu,\mu\in\Lambda$.

3. 设 Π 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系,λ 为不可约表示(ρ,V)的最高权. 试证 $m_\mu=1,\mu=\lambda-k\alpha; 0\leqslant k\leqslant\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)},\alpha\in\Pi$.

§4 权 格

设 $\mathfrak{h}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 从前面讨论知 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示,因而任何有限维表示与 $\mathfrak{h}$ 上的函数有密切关系. 本节将讨论 $\mathfrak{h}$ 上某些与表示的权有关的函数的性质.

现设 Δ 为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的根系,在 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$ 中确定好字典序. 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为对应的素根系. Δ_+,Δ_-分别为正,负根系.

利用 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型(x,y)将 $\mathfrak{h}^*$ 与 $\mathfrak{h}$ 等同. $\Delta^\vee,\Pi^\vee$分别为余根系,余素根系.

定义 6.4.1 若 $\mu\in\mathfrak{h}^*(\mathfrak{h})$满足

$$(\mu,\alpha_i^\vee)\in\boldsymbol{Z},\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

则称 μ 为 $\mathfrak{h}$ 的**整线性函数**. 所有整线性函数的集合记为 P,称为 $\mathfrak{h}$ 的**权格**.

若 $\mu\in P$,且$(\mu,\alpha_i^\vee)\in\boldsymbol{Z}_+(1\leqslant i\leqslant n)$,则称 μ 为 $\mathfrak{h}$ 的**支配整线性函数**. 所有支配整线性函数的集合记为 P^+,称为 $\mathfrak{h}$ 的**支配权格**.

若 $\mu\in P^+$,且$(\mu,\alpha_i^\vee)\in\boldsymbol{N}(1\leqslant i\leqslant n)$,则称 μ 为 $\mathfrak{h}$ 的**强支配整线性函数**. 所有强支配整线性函数的集合记为 P^{++},称为 $\mathfrak{h}$ 的**强支配权格**.

从本章§2 知,$\mathfrak{g}$ 的有限维表示(ρ,V)的权系 $\Lambda\subseteq P$,其最高权 $\lambda\in P^+$.

引理 6.4.1 设 μ 是 $\mathfrak{h}$ 上的线性函数，则 $\mu \in P(P^+, P^{++})$ 当且仅当

$$(\mu, \alpha^\vee) \in \mathbf{Z}(\mathbf{Z}_+, \mathbf{N}), \quad \forall \alpha \in \Delta_+.$$

又令 $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$，则 $\delta \in P^{++}$，且

$$(\delta, \alpha_i^\vee) = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1}$$

证 第一个结论的充分性是显然的. 又若 $\alpha \in \Delta_+$，由引理 5.6.4知，$\alpha^\vee = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i^\vee, k_i \in \mathbf{Z}_+$. 显然，$\sum_{i=1}^{n} k_i \in \mathbf{N}$. 于是第一个结论的必要性也成立.

设 $\alpha \in \Delta_+, \alpha \neq \alpha_i$，则 $r_{\alpha_i}(\alpha) \in \Delta_+$. 故 r_{α_i} 在集合 $\Delta_+ - \{\alpha_i\}$ 上诱导出一个置换. 故

$$\begin{aligned} r_{\alpha_i}(\delta) &= r_{\alpha_i}\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha \in \Delta_+ \\ \alpha \neq \alpha_i}} \alpha\Bigg) + r_{\alpha_i}\left(\frac{1}{2}\alpha_i\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha \in \Delta_+ \\ \alpha \neq \alpha_i}} \alpha - \frac{1}{2}\alpha_i = \delta - \alpha_i. \end{aligned}$$

于是由

$$r_{\alpha_i}(\delta) = \delta - \frac{2(\delta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i = \delta - (\delta, \alpha_i^\vee)\alpha_i$$

知(1)式成立. 故 $\delta \in P^{++}$. ▌

定理 6.4.2 设 P, W 分别为权格与 Weyl 群，则下面结果成立：

1) P 对于加法为 Abel 群，P^+ 与 P^{++} 对加法封闭；

2) $w(\mu) \in P,\ \forall \mu \in P, w \in W$；

3) 若 $\lambda \in P^+, w \in W$，则

$$\lambda - w(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} k_i \alpha_i, \quad k_i \in \mathbf{Z}_+, \tag{2}$$

$$(\lambda + \delta, \lambda + \delta) \geqslant (w(\lambda) + \delta, w(\lambda) + \delta); \tag{3}$$

4) 若 $\lambda \in P^{++}$，则 $w(\lambda) = \lambda$ 当且仅当 $w = \mathrm{id}$.

证 1) 结论 1)是明显的.

2) 设 $\mu\in P,\alpha_i\in\Pi$. 于是

$$(r_{\alpha_i}(\mu),\alpha_j^\vee)=\left(\mu-\frac{2(\mu,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i,\alpha_j^\vee\right)$$

$$=(\mu,\alpha_j^\vee)-(\mu,\alpha_i^\vee)(\alpha_i,\alpha_j^\vee)\in\mathbf{Z},$$

故 $r_{\alpha_i}(\mu)\in P$, W 由 $\{r_{\alpha_i}|1\leqslant i\leqslant n\}$生成. 故结论 2)成立.

3) 我们对 $l(w)$作归纳证明. $l(w)=1$, 即 $w=r_{\alpha_i},\alpha_i\in\Pi$, 此时

$$\lambda-r_{\alpha_i}(\lambda)=(\lambda,\alpha_i^\vee)\alpha_i,\quad(\lambda,\alpha_i^\vee)\in\mathbf{Z}_+.$$

故 $l(w)=1$ 时, (2)式成立. 设 $l(w)=t-1$ 时(2)式成立. 当 $l(w)=t$ 时, 则 $\exists\, w_1\in W,\alpha_i\in\Pi$, 使得 $w=w_1r_{\alpha_i}$, $l(w_1)=t-1$. 由定理 4.2.3的证明知 $w_1(\alpha_i)\in\Delta_+$. 于是

$$\lambda-w(\lambda)=\lambda-w_1r_{\alpha_i}(\lambda)=\lambda-w_1(\lambda-(\lambda,\alpha_i^\vee)\alpha_i)$$

$$=\lambda-w_1\lambda+(\lambda,\alpha_i^\vee)w_1(\alpha_i)=\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i,$$

其中 $k_i\in\mathbf{Z}_+$. 故(2)式成立.

又

$$\begin{aligned}
&(w(\lambda)+\delta,w(\lambda)+\delta)\\
&=(\lambda+\delta-\lambda+w(\lambda),\lambda+\delta-\lambda+w(\lambda))\\
&=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-2(\lambda+\delta,\lambda-w(\lambda))+(\lambda,\lambda)\\
&\quad+(w(\lambda),w(\lambda))-2(\lambda,w(\lambda))\\
&=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-2(\delta,\lambda-w(\lambda))\\
&=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-\sum_{i=1}^n k_i(\alpha_i,\alpha_i)\\
&\leqslant(\lambda+\delta,\lambda+\delta),
\end{aligned}$$

即(3)式成立.

(**注** 从这里我们看到, (3)中等号成立, 当且仅当 $w(\lambda)=\lambda$. 或者, 若 $\mu\in W\lambda-\{\lambda\}$, 则$(\mu+\delta,\mu+\delta)<(\lambda+\delta,\lambda+\delta)$.)

4) 由结论 3)的证明知, $\lambda\in P^{++}$时, $\lambda=w(\lambda)$当且仅当 $l(w)=0$, 即 $w=\mathrm{id}$. 故结论 4)成立. ▌

下面我们考虑 $\mathfrak{h}$ 上的对称函数与反对称函数. 首先,我们定义 Weyl 群 W 的元素在 $\mathfrak{h}$ 上的函数 $F(h)$ 上的作用如下:

$$(wF)(h)=F(w^{-1}(h)), \quad \forall h\in\mathfrak{h}. \tag{4}$$

容易证明下面公式:

$$w_1(w_2F)=(w_1w_2)F,$$

$$w(F_1\cdot F_2)=wF_1\cdot wF_2,$$

$$w(F_1+F_2)=wF_1+wF_2,$$

这里 $F_1\cdot F_2$ 表示函数 F_1 与 F_2 的乘积,即

$$(F_1\cdot F_2)(h)=F_1(h)\cdot F_2(h), \quad \forall h\in\mathfrak{h}.$$

其他一些性质读者可自己寻求.

定义 6.4.2 如果 $\mathfrak{h}$ 上的函数 F 满足

$$wF=F, \quad \forall w\in W,$$

则称 F 为 $\mathfrak{h}$ 上的**对称函数**.

若 $\mathfrak{h}$ 上的函数 F 满足

$$wF=\det w\cdot F, \quad \forall w\in W,$$

则称 F 为 $\mathfrak{h}$ 上的**反对称函数**.

显然,F 为对称函数当且仅当

$$r_{\alpha_i}F=F, \quad \forall \alpha_i\in\Pi;$$

F 为反对称函数当且仅当

$$r_{\alpha_i}F=-F, \quad \forall \alpha_i\in\Pi.$$

对称函数对于加法、乘法是封闭的,反对称函数对于加法及与常数的乘法是封闭的. 两个反对称函数之积是对称函数;一个反对称函数与一个对称函数之积是反对称函数.

又若 F 是 $\mathfrak{h}$ 上任一函数,则

$$\sum_{w\in W}\det w\cdot wF \tag{5}$$

是反对称函数.

事实上,$\forall \alpha_i\in\Pi$,我们有

$$r_{\alpha_i}\Big(\sum_{w\in W}\det\, w\cdot wF\Big)=\sum_{w\in W}\det r_{\alpha_i}\cdot\det r_{\alpha_i}w\cdot(r_{\alpha_i}w)F$$

$$= - \sum_{r_{\alpha_i} w \in W} \det r_{\alpha_i} w \cdot (r_{\alpha_i} w) F = - \sum_{w \in W} \det w \cdot w F.$$

我们将特别感兴趣的是当 $F(h)=\exp(\mu,h)(\mu\in P)$时，由上述办法构造的反对称函数.

引理 6.4.3 设 $\mu\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$. 令

$$A_\mu(h) = \sum_{w\in W}\det w \cdot w\exp(\mu,h), \quad \forall\, h \in \mathfrak{h}, \tag{6}$$

则

1) A_μ 是 $\mathfrak{h}$ 上的反对称反函数，且

$$A_\mu(h) = \sum_{w\in W}\det w \cdot \exp(w(\mu),h); \tag{7}$$

2) $A_{w(\mu)}=\det w \cdot A_\mu, \quad \forall w\in W;$ (8)

3) 若存在 $w\in W, w\neq \mathrm{id}$，使得 $w(\mu)=\mu$，则 $A_\mu=0$；

4) 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$，且 $\mu_i\neq\mu_j, i\neq j$；又 $c_1,c_2,\cdots,c_m\in\boldsymbol{C}$ $(c_i\neq 0, 1\leqslant i\leqslant m)$，并且使得

$$F(h) = \sum_{i=1}^{m} c_i\exp(\mu_i,h) \tag{9}$$

为反对称函数. 则存在 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$使得

$$\lambda_j > w(\lambda_j), \quad \forall w\in W, w\neq \mathrm{id}, \tag{10}$$

$$F = \sum_{j=1}^{t} d_j A_{\lambda_j}, \tag{11}$$

其中 $d_j\in\boldsymbol{C}$ $(1\leqslant j\leqslant t)$.

证 1) 在(5)中取 $F(h)=\exp(\mu,h)$，则知 A_μ 是反对称的. 又由(4)式知

$$w\exp(\mu,h)=\exp(\mu,w^{-1}(h))=\exp(w(\mu),h),$$

因而(7)式成立.

2) 由于

$$\begin{aligned} A_{w(\mu)}(h) &= \sum_{w_1\in W}\det w_1 \cdot w_1\exp(w(\mu),h) \\ &= \sum_{w_1\in W}\det w_1 \cdot w_1\exp(\mu,w^{-1}(h)) \end{aligned}$$

$$=A_\mu(w^{-1}(h)) = w\cdot A_\mu(h),$$

再由结论 1)知(8)式成立.

3) 设 $w\neq \mathrm{id}, w(\mu)=\mu$. 若$(\mu,\alpha)\neq 0$, $\forall \alpha\in\Delta$,则存在 Weyl 房 Ω,使得 $\mu\in\Omega\cap w(\Omega)$. 但 $\Omega\cap w(\Omega)=\varnothing$,于是存在 $\alpha\in\Delta$,使$(\mu,\alpha)=0$,即 $r_\alpha(\mu)=\mu$. 于是由(8)式

$$A_\mu=A_{r_\alpha(\mu)}=\det r_\alpha\cdot A_\mu=-A_\mu,$$

故 $A_\mu=0$,即结论 3)成立.

4) 因为 $\mu_i\neq\mu_j(i\neq j)$. 故 $\exp(\mu_1,h),\exp(\mu_2,h),\cdots,\exp(\mu_m,h)$作为 $\mathfrak{h}$ 上函数构成的线性空间中的元素是线性无关的. 设 $w\in W$,则

$$wF(h)=\sum_{i=1}^m c_i\exp(w(\mu_i),h)=\sum_{i=1}^m c_i\det w\cdot\exp(\mu_i,h).$$

由 $\{\exp(\mu_i,h)\}$线性无关,知 $w(\mu_1),w(\mu_2),\cdots,w(\mu_m)$是 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$ 的排列. 记 $w(\mu_i)=\mu_{w(i)}$,则 $c_{w(i)}=\det w\cdot c_i$. 由于 W 作用于$\{\mu_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$上,故可将$\{\mu_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$按 W 的轨道分解:

$$\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m\}=\bigcup_{j=1}^t W\mu_{i_j}.$$

$W\mu_{i_j}$中取最大元 λ_j,即

$$\lambda_j>w(\lambda_j),\quad w\in W, w\neq\mathrm{id},$$

则有
$$F=\sum_{j=1}^t d_jA_{\lambda_j},$$

其中 d_j 为 $\exp(\lambda_j,h)$在 $F(h)$中的系数. ▌

定理 6.4.4 设 $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$,则

$$A_\delta(h)=\prod_{\alpha\in\Delta_+}(\exp(\alpha/2,h)-\exp(-\alpha/2,h)),\tag{12}$$

$$A_\delta(h)=\exp(\delta,h)\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h)),\tag{12'}$$

$$A_\delta(h)=\exp(-\delta,h)\prod_{\alpha\in\Delta_+}(\exp(\alpha,h)-1).\tag{12''}$$

证 显然,(12′)与(12″)两式是(12)式的必然结果,故只要证明(12)式成立.设(12)式的右端为 Q.

首先,证明 Q 是反对称的.事实上

$$
\begin{aligned}
(r_{\alpha_i}Q)(h) &= Q(r_{\alpha_i}(h)) \\
&= \prod_{\alpha\in\Delta_+}(\exp(r_{\alpha_i}(\alpha)/2,h)-\exp(-r_{\alpha_i}(\alpha)/2,h)),
\end{aligned}
$$

由于 $\alpha\in\Delta_+-\{\alpha_i\}$, $r_{\alpha_i}(\alpha)\in\Delta_+-\{\alpha_i\}$; $r_{\alpha_i}(\alpha_i)=-\alpha_i$,故

$$r_{\alpha_i}Q=-Q=\det r_{\alpha_i}\cdot Q.$$

因此 Q 是反对称的.

其次,将 Q 的乘积展开,有

$$Q(h)=\sum_{\mu}\pm\exp(\mu,h),$$

其中

$$\mu=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\varepsilon_\alpha\alpha,\quad \varepsilon_\alpha=\pm 1.$$

显然 $\delta\in\{\mu\}$,且 $\delta>\mu$, $\mu\neq\delta$.又知 $\exp(\delta,h)$ 在 $Q(h)$ 中系数为1.于是由引理 6.4.3 知

$$Q(h)=A_\delta(h)+d_{\lambda_2}A_{\lambda_2}(h)+\cdots+d_{\lambda_t}A_{\lambda_t}(h).$$

此时 $\{\mu\}$ 按 W 的轨道分解为

$$\{\mu\}=\bigcup_{j=1}^{t}W\lambda_j,\quad \lambda_1=\delta$$

且

$$\lambda_j>w\lambda_j,\quad \forall w\in W, w\neq \mathrm{id}.$$

最后,我们证明上述轨道分解只含一个轨道,即 $\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 不存在.若不然,设

$$\lambda_j=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\varepsilon_\alpha\alpha,\quad \varepsilon_\alpha=\pm 1,$$

其中一定有 $\alpha\in\Delta_+$,使得 $\varepsilon_\alpha=-1$.令

$$\lambda_j'=\sum_{\varepsilon_\alpha=-1}\alpha=\sum_{i=1}^{n}m_i\alpha_i,\quad m_i\in\mathbf{Z}_+.$$

于是 $$\lambda_j'\neq 0,\quad \lambda_j=\delta-\lambda_j'.$$

因而 $$(\lambda_j',\lambda_j')=\sum_{i=1}^{n}m_i(\lambda_j',\alpha_j)>0.$$

故存在 i_0 使得

$$m_{i_0}>0,\quad (\lambda_j',\alpha_{i_0})>0,$$

即 $(\lambda_j',\alpha_{i_0}^\vee)\in\boldsymbol{N}$.

另一方面,

$$\lambda_j>r_{\alpha_{i_0}}(\lambda_j)=\lambda_j-(\lambda_j,\alpha_{i_0}^\vee)\alpha_{i_0},$$

故 $$(\lambda_j,\alpha_{i_0}^\vee)\in\boldsymbol{N}.$$

但是

$$(\lambda_j,\alpha_{i_0}^\vee)=(\delta-\lambda_j',\alpha_{i_0}^\vee)=1-(\lambda_j',\alpha_{i_0}^\vee)\leqslant 0,$$

这就产生矛盾.故 $\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 不存在,即(12)式成立. ▌

从引理 6.4.3 我们看到形如(9)式的反对称函数都可由形如(10)式中 A_{λ_j} 线性表出.下面我们将证明当 $\lambda_j\in P^{++}$ 时,这些 A_{λ_j} 是互相“正交”的,因而是线性无关的.自然,$\lambda\in P^+$ 当且仅当 $\lambda+\delta\in P^{++}$.

定理 6.4.5 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in P^{++}$,且 $i\neq j$ 时,$\lambda_i\neq\lambda_j$.则 A_{λ_1},$A_{\lambda_2},\cdots,A_{\lambda_m}$ 作为 $\mathfrak{h}$ 的函数构成的线性空间中的元素是线性无关的.

证 令 $\xi=2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i^\vee,x_i\in\boldsymbol{R}$.于是可以将函数 $A_{\lambda_i}(\xi)$ 看成 n 元实变量的复值函数,即 $A_{\lambda_i}(\xi)$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的复值函数,且

$$A_{\lambda_i}(\xi)\overline{A_{\lambda_j}(\xi)}=\sum_{w_1,w_2}\det w_1w_2\cdot\exp(w_1(\lambda_i),\xi)\overline{\exp(w_2(\lambda_j),\xi)}.$$

由于 $(w_1(\lambda_i),\alpha_k^\vee),(w_2(\lambda_j),\alpha_k^\vee)\in\boldsymbol{Z}$,且 $i\neq j$ 时,对任何 $w_1,w_2\in W$ 均有 $w_1(\lambda_1)\neq w_2(\lambda_2)$,故存在 k 使得

$$(w_1(\lambda_i),\alpha_k^\vee)\neq(w_2(\lambda_2),\alpha_k^\vee).$$

于是

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 A_{\lambda_i}(\xi)\, \overline{A_{\lambda_j}(\xi)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = 0. \tag{13}$$

另一方面，$w_1 \neq w_2$ 时，$w_1(\lambda_i) \neq w_2(\lambda_i)$，故

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \cdots \int_0^1 A_{\lambda_i}(\xi)\, \overline{A_{\lambda_i}(\xi)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&\quad = \sum_{w \in W} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \exp 2\pi \sqrt{-1} \sum_{k=1}^{n} (w\lambda_i, \alpha_k^\vee) x_k \right|^2 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\
&\quad = |W|.
\end{aligned} \tag{14}$$

由此可知 $A_{\lambda_1}(\xi), \cdots, A_{\lambda_m}(\xi)$ 是线性无关的，故 $A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2}, \cdots, A_{\lambda_m}$ 是线性无关的. ▌

我们可以将(13)与(14)两式统一为一个“正交”性公式：

$$\frac{1}{|W|} \int_0^1 \cdots \int_0^1 A_{\lambda_i}(\xi)\, \overline{A_{\lambda_j}(\xi)} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = \delta_{ij}.$$

下面我们讨论形如(9)式的反对称函数以及相关的 $\exp(\mu, h)$ 等函数的微分性质.

在 $\mathfrak{h}$ 中取基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 使得

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

于是 $\mathfrak{h}$ 上的函数 $F(h)$ 可视为 n 个变量 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的函数，这里 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 h 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标，即 $h = \sum_{i=1}^{n} t_i \varepsilon_i$. 如果 $F(h)$ 是可微的，则 $\mathrm{grad} F$ 定义 $\mathfrak{h}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的映射为

$$\mathrm{grad} F(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(h)}{\partial t_i} \varepsilon_i, \quad \forall\, h \in \mathfrak{h}. \tag{15}$$

另一个重要的算子是作用于 $F(h)$ 上的 Laplace 算子 Δ：

$$(\Delta F)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F(h)}{\partial t_i^2}. \tag{16}$$

由直接计算可得

$$\mathrm{grad} \exp(\mu, h) = \exp(\mu, h) \cdot \mu, \tag{17}$$

$$\mathrm{grad} \log(1 - \exp(-\alpha, h)) = \frac{\exp(-\alpha, h)}{1 - \exp(-\alpha; h)} \alpha, \tag{18}$$

这里 h 满足 $|\exp(\alpha, h)| > 1$，

$$\Delta \exp(\mu,h)=(\mu,\mu)\exp(\mu,h). \tag{19}$$

定理 6.4.6 设 $\lambda\in\mathfrak{h}_R$,满足

$$w\lambda<\lambda,\quad \forall w\in W-\{\mathrm{id}\},$$

则

$$\Delta A_\lambda(h)=(\lambda,\lambda)A_\lambda(h). \tag{20}$$

特别,

$$\Delta A_\delta(h)=(\delta,\delta)A_\delta(h). \tag{21}$$

证 由(19)式知

$$\begin{aligned}\Delta A_\lambda(h) &= \sum_{w\in W}\det w\cdot\Delta\exp(w(\lambda),h)\\ &= \sum_{w\in W}\det w\cdot(w(\lambda),w(\lambda))\exp(w(\lambda),h)\\ &= (\lambda,\lambda)A_\lambda(h).\end{aligned}$$ ▌

定理 6.4.7 设 $F(h),G(h)$ 均为 $\mathfrak{h}$ 上可微函数,则

$$\begin{aligned}\Delta(F\cdot G)(h)=&(\Delta F)\cdot G(h)+F\cdot(\Delta G)(h)\\ &+2(\mathrm{grad}F(h),\mathrm{grad}G(h)).\end{aligned}$$

证 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(GF)}{\partial t_i^2}&=\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial F}{\partial t_i}G+F\frac{\partial G}{\partial t_i}\right)\\ &=\frac{\partial^2F}{\partial t_i^2}G+F\frac{\partial^2G}{\partial t_i^2}+2\frac{\partial F}{\partial t_i}\cdot\frac{\partial G}{\partial t_i},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta(F\cdot G)(h) &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial^2(FG)}{\partial t_i^2}(h)\\ &= (\Delta F)(h)\cdot G(h)+F(h)\cdot(\Delta G)(h)\\ &\quad + 2(\mathrm{grad}F(h),\mathrm{grad}G(h)).\end{aligned}$$ ▌

习 题

1. 设 P 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的权格,W 为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群. 试证:$\forall\mu\in P$,存在 $\mu_0\in W\mu=\{w(\mu)\mid w\in W\}$ 使得 $(\mu_0,\alpha_i^\vee)\in\mathbf{Z}_+$,即 $\mu_0\in$

P^+；且 $\mu_0 \geqslant w(\mu)$，$\forall w \in W$.

2. 设(ρ,V)为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示，Λ 为其权系. 证明 Λ 有 W 轨道分解：

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{t} W\lambda_i,$$

其中 $\lambda_i \in P^+(1 \leqslant i \leqslant t)$，且满足

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_t; \quad \lambda_1 \text{ 为最高权.}$$

3. 设 $\mathfrak{g} = G_2$，素根系为 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，其中 α_1 为短根，(ρ,V)为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示，最高权 λ 满足$(\lambda, \alpha_i^\vee) = 2\ (i=1,2)$. 试求 $\lambda_i \in P^+$，使得 ρ 的权系 Λ 有满足习题 2 的分解.

4. 设 $\mathfrak{g} = G_2$. $\lambda_i \in P^+$，满足$(\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$. 试求 $W\lambda_i = \{w(\lambda_i) \mid w \in W\}$. 由此确定以 λ_i 为最高权的不可约表示(ρ_i, V_i)的维数.

5. 设 $\mathfrak{g} = sl(2, \boldsymbol{C})$. 试求 P, P^+, P^{++} 及 $A_\lambda(h)$，其中 $\lambda \in P^+$.

§5 不可约表示的特征标

特征标是有限群与紧致李群表示论中极重要的内容. 复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示的特征标最初就是由紧致李群的表示的特征标产生的. 本节将从李代数的角度来讨论复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示的特征标.

定义 6.5.1 设 $\mathfrak{h}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，(ρ,V)为 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示，称 $\mathfrak{h}$ 上的函数

$$\chi_\rho(h) = \mathrm{tr}(\exp \rho(h)), \quad h \in \mathfrak{h} \tag{1}$$

为表示(ρ,V)的**特征标**.

显然，特征标有下面性质：

1. 若(ρ_1, V_1)与(ρ_2, V_2)是等价表示，则

$$\chi_{\rho_1}(h) = \chi_{\rho_2}(h), \quad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

2. 若表示(ρ,V)有子表示分解

$$V = V_1 \dotplus V_2 \dotplus \cdots \dotplus V_k,$$

$\rho_i = \rho|_{V_i}$，则

$$\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2} + \cdots + \chi_{\rho_k}.$$

3. 若 V 对 $\mathfrak{h}$ 的权空间分解为

$$V = \sum_{\mu \in \Lambda} V_\mu,$$

Λ 为权系，则

$$\chi_\rho(h) = \sum_{\mu \in \Lambda} \dim V_\mu \exp(\mu, h) = \sum_{\mu \in \Lambda} m_\mu \exp(\mu, h).$$

4. $\chi_\rho(h)$ 是 $\mathfrak{h}$ 上的对称函数，即

$$w\chi_\rho(h) = \chi_\rho(h), \quad \forall w \in W, h \in \mathfrak{h}.$$

事实上，由 $m_{w(\mu)} = m_\mu$ 知

$$\begin{aligned} w\chi_\rho(h) &= \sum_{\mu \in \Lambda} m_\mu \exp(w(\mu), h) \\ &= \sum_{w(\mu) \in \Lambda} m_{w(\mu)} \exp(w(\mu), h) \\ &= \chi_\rho(h). \end{aligned}$$

引理 6.5.1 设 (ρ, V) 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示，Λ, λ 分别为 (ρ, V) 的权系，最高权. 又 $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$，则

$$(\mu + \delta, \mu + \delta) < (\lambda + \delta, \lambda + \delta), \quad \mu \in \Lambda - \{\lambda\}.$$

证 以 W 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群，$\mu \in \Lambda - \{\lambda\}$. 于是有 $\mu_0 \in W\mu \cap P^+$. 显然，$\mu_0 \in \Lambda$. 由定理 6.4.2 知

$$(\mu + \delta, \mu + \delta) \leqslant (\mu_0 + \delta, \mu_0 + \delta),$$

且等号成立当且仅当 $\mu = \mu_0$，故可假定 $\mu \in \Lambda \cap P^+$，$\mu \neq \lambda$，则 $\Delta_\mu = \{\alpha \in \Delta_+ \mid \mu + \alpha \in \Lambda\} \neq \varnothing$. 取 $\alpha_0 \in \Delta_\mu$ 满足 $\mathrm{ht}\alpha_0 = \max\{\mathrm{ht}\alpha \mid \alpha \in \Delta_\mu\}$，于是 $\mu_1 = \mu + \alpha_0 \in \Lambda$. 由于 $\mu \in P^+$，$\delta \in P^{++}$，故 $(\mu, \alpha_0) \geqslant 0$，$(\delta, \alpha_0) > 0$，于是 $(\mu_1 + \delta, \mu_1 + \delta) - (\mu + \delta, \mu + \delta) = 2(\mu + \delta, \alpha_0) + (\alpha_0, \alpha_0) > 0$. 现证 $\mu_1 \in P^+$. 若不然，则有素根 α_i，使得 $(\mu_1, \alpha_i^\vee) < 0$. 于是 $(\alpha_0, \alpha_i^\vee) \leqslant (\mu + \alpha_0, \alpha_i^\vee) < 0$，因而 $\beta = \alpha_0 - (\mu_1, \alpha_i^\vee)\alpha_i$ 也是正根，且 $\mathrm{ht}\beta > \mathrm{ht}\alpha_0$，而且 $r_{\alpha_i}(\mu_1) = \mu_1 - (\mu_1, \alpha_i^\vee)\alpha_i = \mu + \beta \in \Lambda$. 这与 α_0 的选取矛盾，故 $\mu_1 \in P^+$. 这样，在 $\Lambda \cap P^+$ 中可选取 $\mu < \mu_1 < \cdots < \mu_t = \lambda$，使得

$$(\mu+\delta,\mu+\delta)<(\mu_1+\delta,\mu_1+\delta)<\cdots<(\lambda+\delta,\lambda+\delta). \quad \blacksquare$$

定理 6.5.2(H. Weyl) 设(ρ,V)是复半单李代数$\mathfrak{g}$的不可约表示,最高权为λ.则

$$\chi_\rho=A_{\lambda+\delta}/A_\delta,$$

其中$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$,$A_\mu(\mu=\lambda+\delta$ 或 $\delta)$如引理 6.4.3 所述.

证 令C_ρ如定理 6.3.4 所述.于是

$$C_\rho=c\cdot\mathrm{id}_V,\quad c=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta).$$

由定理 6.3.4 的证明可知

$$cm_\mu=m_\mu(\mu+2\delta,\mu)+2\sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{j=1}^{\infty}m_{\mu+j\alpha}(\mu+j\alpha,\alpha).$$

上式两边乘以$\exp(\mu,h)$,再对$\mu\in\Lambda$求和,得

$$c\chi_\rho(h)=\sum_{\mu\in\Lambda}m_\mu(\mu+2\delta,\mu)\exp(\mu,h)$$

$$+2\sum_{\mu\in\Lambda}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{j=1}^{\infty}m_\mu(\mu,\alpha)\exp(\mu-j\alpha,h).$$

可取$h\in\mathfrak{h}$,使得

$$|\exp(\alpha,h)|>1,\quad\forall\alpha\in\Delta_+.$$

于是

$$\sum_{\mu}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{j=1}^{\infty}m_\mu(\mu,\alpha)\exp(\mu-j\alpha,h)$$

$$=\sum_{\mu}\sum_{\alpha\in\Delta_+}m_\mu(\mu,\alpha)\exp(\mu,h)\sum_{j=1}^{\infty}(\exp(-\alpha,h))^j$$

$$=\sum_{\mu}\sum_{\alpha\in\Delta_+}m_\mu(\mu,\alpha)\exp(\mu,h)\cdot\frac{\exp(-\alpha,h)}{1-\exp(-\alpha,h)}.$$

由本章§4 的(17),(18)及(19)式,可得

$$\Delta\chi_\rho(h)=\sum_{\mu\in\Lambda}m_\mu(\mu,\mu)\exp(\mu,h),$$

$$\mathrm{grad}\chi_\rho(h)=\sum_{\mu\in\Lambda}m_\mu\exp(\mu,h)\mu,$$

$$\mathrm{grad}\log(1-\exp(-\alpha,h))=\frac{\exp(-\alpha,h)}{1-\exp(-\alpha,h)}\alpha.$$

于是

$$c\chi_\rho(h) = \Delta\chi_\rho(h) + (2\delta, \mathrm{grad}\chi_\rho(h)) + 2\Big(\mathrm{grad}\chi_\rho(h), \mathrm{grad}\log\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h))\Big)\Big)$$

$$= \Delta\chi_\rho(h) + 2\Big(\mathrm{grad}\chi_\rho(h), \delta + \mathrm{grad}\log\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h))\Big)\Big).$$

又由于

$$A_\delta(h) = \exp(\delta,h)\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h)),$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}A_\delta(h) &= (\mathrm{grad}\exp(\delta,h))\cdot\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h)) \\ &\quad + \exp(\delta,h)\cdot\mathrm{grad}\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h))\Big) \\ &= \exp(\delta,h)\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h))\cdot\delta \\ &\quad + \exp(\delta,h)\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h)) \\ &\quad \cdot\mathrm{grad}\log\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h))\Big) \\ &= A_\delta(h)\cdot\delta + A_\delta(h)\mathrm{grad}\log\Big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}(1-\exp(-\alpha,h))\Big).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}c\chi_\rho(h)A_\delta(h) &= \Delta\chi_\rho(h)A_\delta(h) + 2(\mathrm{grad}\chi_\rho(h), \mathrm{grad}A_\delta(h)) \\ &= \Delta(\chi_\rho(h)A_\delta(h)) - \chi_\rho(h)\cdot\Delta A_\delta(h) \\ &= \Delta(\chi_\rho(h)A_\delta(h)) - (\delta,\delta)\chi_\rho(h)A_\delta(h),\end{aligned}$$

注意到 $c=(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)$，故

$$\Delta(\chi_\rho(h)A_\delta(h)) = (\lambda+\delta,\lambda+\delta)\chi_\rho(h)A_\delta(h).$$

又由于 $\chi_\rho(h)A_\delta(h)$ 是反对称的，且为 $\exp(\mu,h)$ 的组合，故由引理 6.4.3 知

$$\chi_\rho(h)A_\delta(h) = \sum_i c_i A_{\lambda_i}(h),$$

于是

$$\Delta(\chi_\rho(h)A_\delta(h)) = \sum_i c_i(\lambda_i,\lambda_i)A_{\lambda_i}(h).$$

故有

$$\sum_i c_i((\lambda_i,\lambda_i) - (\lambda+\delta,\lambda+\delta))A_{\lambda_i}(h) = 0.$$

由于 $A_{\lambda_i}(h)$是解析的，故可去掉$|\exp(\alpha,h)|>1$ 的限制，即上式对任何 $h\in\mathfrak{h}$ 均成立. 又

$$\begin{aligned}(\chi_\rho A_\delta)(h) &= \sum_{w\in W}\det w\cdot\exp(w(\delta),h)\cdot\sum_{\mu\in\Lambda}m_\mu\exp(\mu,h)\\ &= \sum_{w,\mu}\det w\cdot m_\mu\exp(\mu+w(\delta),h).\end{aligned}$$

因而有 $\mu\in\Lambda,w\in W$ 使得

$$\lambda_i=\mu+w(\delta),$$

而

$$\lambda_i>w_1(\lambda_i),\quad \forall w_1\in W-\{\mathrm{id}\},$$

于是 $\lambda_i\in P^{++}$. 由$\{A_{\lambda_i}\}$线性无关，于是

$$(\lambda_i,\lambda_i)=(\lambda+\delta,\lambda+\delta),$$

即

$$(w^{-1}(\mu)+\delta,w^{-1}(\mu)+\delta)=(\lambda+\delta,\lambda+\delta).$$

由引理 6.5.1 知，$w^{-1}(\mu)=\lambda$. 于是 $\lambda_i=w(\lambda+\delta)$. 由于 $\lambda+\delta\in P^{++}$，故 $\lambda+\delta<w(\lambda+\delta)<\lambda_i$. 若 $w\neq\mathrm{id}$，由 $\mu\leqslant\lambda,w(\delta)<\delta$，故

$$\lambda_i=\mu+w(\delta)<\lambda+\delta.$$

因而，$w=\mathrm{id}$，故 $\lambda_i=\lambda+\delta$. 于是

$$A_\delta(h)\chi_\rho(h)=dA_{\lambda+\delta}(h),\quad d\in\mathbf{C}.$$

比较 $\exp(\lambda+\delta,h)$在等式两边的系数知 $d=1$，故定理成立. ▌

不可约表示特征标的第一个应用是由特征标求出此表示的维数.

定理 6.5.3(**H. Weyl**) 设复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示(ρ,V)的最高权为 λ，则

$$\dim V=\frac{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha,\lambda+\delta)}{\prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha,\delta)}.$$

证 首先，我们证明可取充分小的 $\varepsilon>0$，使 $0<|t|<\varepsilon$ 时，$A_\delta(\sqrt{-1}t\delta)\neq 0$. 事实上，

$$\begin{aligned}A_\delta(\sqrt{-1}t\delta)&=\prod_{\alpha\in\Delta_+}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{-1}t(\alpha,\delta)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-1}t(\alpha,\delta)\right)\right)\\&=\prod_{\alpha\in\Delta_+}2\sqrt{-1}\sin\frac{t}{2}(\alpha,\delta)=(2\sqrt{-1})^m\prod_{\alpha\in\Delta_+}\sin\frac{t}{2}(\alpha,\delta),\end{aligned}$$

其中 $m=|\Delta_+|$. 又 $(\alpha,\delta)>0$. 故可取充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $|t|<\varepsilon$ 时，$A_\delta(\sqrt{-1}t\delta)\neq 0$.

由 Weyl 的特征标公式，有

$$\dim V=\chi_\rho(0)=\lim_{t\to 0}A_{\lambda+\delta}(\sqrt{-1}t\delta)/A_\delta(\sqrt{-1}t\delta),$$

但是

$$\begin{aligned}A_{\lambda+\delta}(\sqrt{-1}t\delta)&=\sum_{w\in W}\det w\cdot\exp(w(\lambda+\delta),\sqrt{-1}t\delta)\\&=\sum_{w\in W}\det w\cdot\exp(w^{-1}(\delta),\sqrt{-1}t(\lambda+\delta))\\&=A_\delta(\sqrt{-1}t(\lambda+\delta))\\&=(2\sqrt{-1})^m\prod_{\alpha\in\Delta_+}\sin\frac{t}{2}(\alpha,\lambda+\delta).\end{aligned}$$

因而

$$\dim V=\prod_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha,\lambda+\delta)\Big/\prod_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha,\delta).\quad \blacksquare$$

注 此公式称为不可约表示的**维数公式**.

作为不可约表示特征标的第二个应用，我们给出不可约表示的权的重数的另一个公式. 设 $\mu\in\mathfrak{h}$. 令 $P(\mu)$ 表示将 μ 分解为正根之和的方法数，即

$$P(\mu)=\left|\left\{k_\alpha\mid\alpha\in\Delta_+,k_\alpha\in\mathbf{Z}_+,\mu=\sum_{\alpha\in\Delta_+}k_\alpha\alpha\right\}\right|.$$

定理 6.5.4(Kostant) 设(ρ,V)是复半单李代数$\mathfrak{g}$的不可约表示,Λ,λ分别为权系,最高权,则

$$m_\mu=\sum_{w\in W}\det w\cdot P(w(\lambda+\delta)-(\mu+\delta)).$$

证 由于$|x|<1$时,有

$$(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1.$$

于是对于$h\in\mathfrak{h}$,使得

$$|\exp(\alpha,h)|>1,\quad\forall\alpha\in\Delta_+$$

的h,我们有

$$A_\delta(h)^{-1}=\exp(-\delta,h)\sum_\mu P(\mu)\exp(-\mu,h).$$

因而

$$\begin{aligned}\chi_\rho(h)&=A_{\lambda+\delta}(h)A_\delta(h)^{-1}\\&=\sum_\mu\sum_{w\in W}\det w\cdot\exp(w(\lambda+\delta),h)\exp(-\mu-\delta,h)P(\mu)\\&=\sum_\mu\sum_{w\in W}\det w\cdot\exp(w(\lambda+\delta)-(\mu+\delta),h)P(\mu).\end{aligned}$$

令$\mu_1=w(\lambda+\delta)-(\mu+\delta)$,于是

$$\mu=w(\lambda+\delta)-(\mu_1+\delta),$$

故

$$\begin{aligned}\chi_\rho(h)&=\sum_{\mu_1}m_{\mu_1}\exp(\mu_1,h)\\&=\sum_{\mu_1}\sum_{w\in W}\det w\cdot P(w(\lambda+\delta)-(\mu_1+\delta))\exp(\mu_1,h).\end{aligned}$$

由$\chi_\rho(h)$的解析性,可将条件$|\exp(\alpha,h)|>1$去掉.再由$\exp(\mu,\alpha)$的线性无关性,即可得公式. ▌

习 题

1. 设$\mathfrak{h}$为复半单李代数$\mathfrak{g}$的Cartan子代数.$\Delta,\Delta_+,\Pi=\{\alpha_1,$

$\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$分别为根系，正根系与素根系，$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+}\alpha$. 又$(\rho_i,V_i)$是 $\mathfrak{g}$ 的两个不可约表示，设 $\xi=2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i^\vee$，$x_i\in\boldsymbol{R}$，$W$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群. 试证

$$\frac{1}{|W|}\int_0^1\cdots\int_0^1\chi_{\rho_1}(\xi)\,\overline{\chi_{\rho_2}(\xi)}A_\delta(\xi)\,\overline{A_\delta(\xi)}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\begin{cases}0, & \text{若 } \rho_1 \text{ 与 } \rho_2 \text{ 不等价；}\\ 1, & \text{若 } \rho_1 \text{ 与 } \rho_2 \text{ 等价.}\end{cases}$$

2. 设(ρ,V)，(ρ_1,V_1)为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示，且(ρ_1,V_1)不可约. 试证(ρ,V)不可约子表示分解式中所含与(ρ_1,V_1)等价的子表示个数为

$$\frac{1}{|W|}\int_0^1\cdots\int_0^1\chi_\rho(\xi)\,\overline{\chi_{\rho_1}(\xi)}A_\delta(\xi)\,\overline{A_\delta(\xi)}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

3. 设(ρ_1,V_1)，(ρ_2,V_2)为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示. 试求 $\chi_{\rho_1\otimes\rho_2}$ 与 χ_{ρ_1}与 χ_{ρ_2}的关系.

4. 设(ρ_1,V_1)，(ρ_2,V_2)是 $\mathfrak{g}=sl(2,\boldsymbol{C})$的两个不可约表示. 试求 χ_{ρ_1}，χ_{ρ_2}与 $\chi_{\rho_1\otimes\rho_2}$及 $\rho_1\otimes\rho_2$ 的不可约子代数的分解.

5. 设(ρ,V)是 $\mathfrak{g}=G_2$ 的不可约表示. $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$为 G_2 的素根系，且 α_1 为短根. 在下列情况下计算 $\dim V$（λ 为 ρ 的最高权）：

1) $(\lambda,\alpha_1^\vee)=1$，$(\lambda,\alpha_2^\vee)=0$；

2) $(\lambda,\alpha_2^\vee)=1$，$(\lambda,\alpha_1^\vee)=0$；

3) $(\lambda,\alpha_1^\vee)=(\lambda,\alpha_2^\vee)=1$.

6. 设(ρ,V)是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示，其最高权满足$(\lambda,\alpha_i^\vee)=1$，$1\leqslant i\leqslant n$，这里 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为素根系. 试求 $\dim V$.

7. 设(ρ_1,V_1)，(ρ_2,V_1)为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. λ_1，λ_2 为它们的最高权. 设在$(\rho_1\otimes\rho_2,V_1\otimes V_2)$的不可约子表示分解中，有 n_λ 个不可约子表示的最高权为 λ. 试证

$$n_\lambda = \sum_{w_1, w_2 \in W} (\det(w_1 w_2)) P(w_1(\lambda_1 + \delta) + w_2(\lambda_2 + \delta) - (\lambda + 2\delta)).$$

8. 设复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 中素根长度相同. 试证

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+} (\alpha, \delta) = \left(\frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{2}\right)^{|\Delta_+|} \cdot \prod_{\alpha \in \Delta_+} \mathrm{ht}\alpha.$$

§6 诱导表示

从李代数的子代数的表示构造整个李代数的表示(即所谓诱导表示)的思想和方法不仅在李代数理论中是重要的,而且在群(包括李群)表示论,结合代数表示论中也是重要的. 李代数的诱导表示理想与李代数的通用包络代数密切相关. 我们先从结合代数的诱导表示入手.

定义 6.6.1 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的结合代数,V 是 F 上的线性空间. ρ 是 $\mathfrak{a}$ 到 $\mathrm{End}V$(即 V 的所有线性变换构成的结合代数)的同态. 此时,称(ρ, V)是 $\mathfrak{a}$ 的一个**表示**. 也称 V 是 $\mathfrak{a}$-**模**,并记

$$a \cdot v = \rho(a)v, \quad \forall a \in \mathfrak{a}, v \in V.$$

显然,若 $\mathfrak{a}$ 为结合代数,则在 $\mathfrak{a}$ 中定义括积为

$$[a, b] = ab - ba, \quad \forall a, b \in \mathfrak{a}.$$

$\mathfrak{a}$ 也是李代数. 以后我们说李代数 $\mathfrak{a}$,均指上述括积.

引理 6.6.1 设 $\mathfrak{a}$ 为域 F 上的结合代数. 又李代数 $\mathfrak{a}$ 的通用包络代数为 $U(\mathfrak{a})$,将 $\mathfrak{a}$ 嵌入 $U(\mathfrak{a})$中,则存在 $U(\mathfrak{a})$到 $\mathfrak{a}$ 的同态 ϕ,满足 $\phi|_{\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$.

证 设 i 为李代数 $\mathfrak{a}$ 到 $U(\mathfrak{a})$的嵌入映射,id 为李代数 $\mathfrak{a}$ 到结合代数 $\mathfrak{a}$ 的映射. 于是有

$$\mathrm{id}([a, b]) = \mathrm{id}(a)\mathrm{id}(b) - \mathrm{id}(b)\mathrm{id}(a), \quad \forall a, b \in \mathfrak{a}.$$

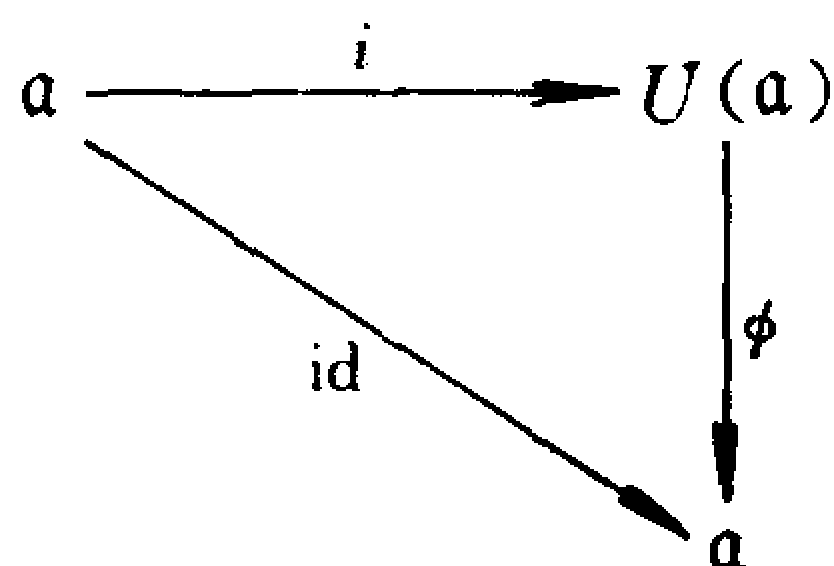
于是有唯一的 $U(\mathfrak{a})$到 $\mathfrak{a}$ 的同态 ϕ,使得

$$\mathrm{id} = \phi \circ i,$$

即

$$\phi \circ i(a)=\mathrm{id}(a)=a, \quad \forall a\in \mathfrak{a}.$$

或者说有交换图表：



但 $\phi \circ i(a)=\phi(a)$，$\forall a\in \mathfrak{a}$，因而 $\phi|_{\mathfrak{a}}=\mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$. ▌

引理 6.6.2 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的结合代数，则结合代数 $\mathfrak{a}$ 的表示(ρ,V)也是李代数 $\mathfrak{a}$ 的表示. 反之，李代数 $\mathfrak{a}$ 的表示(ρ,V)可扩充为结合代数 $\mathfrak{a}$ 的表示.

证 第一个结论是显然的.

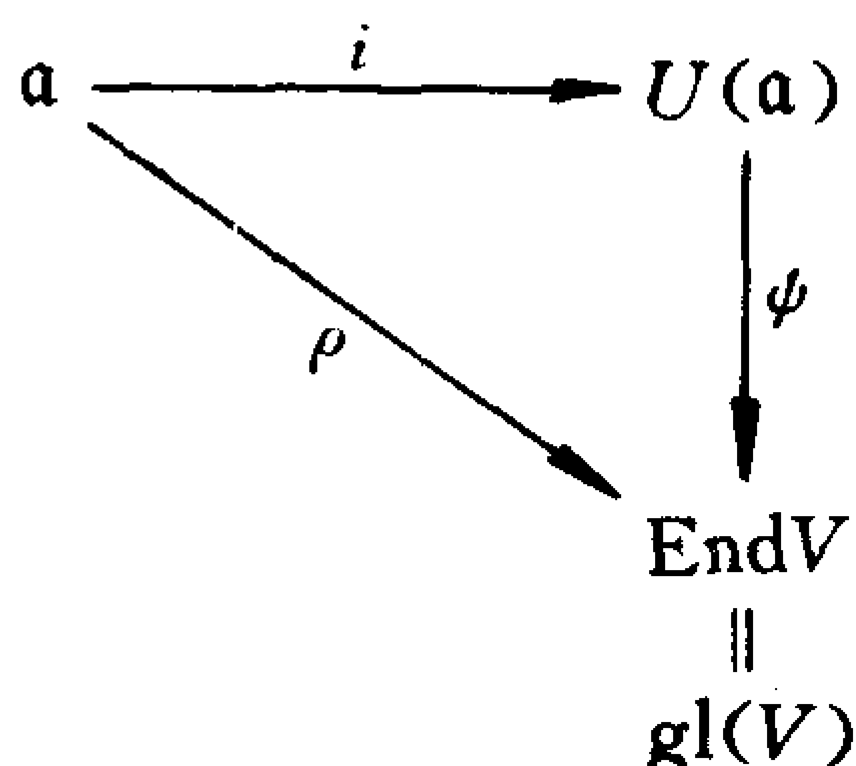
现设(ρ,V)是李代数 $\mathfrak{a}$ 的表示，即 $\mathfrak{a}$ 到 $\mathrm{gl}(V)=\mathrm{End}V$ 中映射 ρ 满足

$$\rho([a,b])=\rho(a)\rho(b)-\rho(b)\rho(a), \quad \forall a,b\in \mathfrak{a}.$$

因而存在 $U(\mathfrak{a})$到 $\mathrm{End}V$ 的唯一的同态映射 ψ，使得

$$\rho=\psi \circ i.$$

或者说有交换图表：



注意到 $\mathfrak{a}\subseteq U(\mathfrak{a})$，于是

$$\rho(a)=\psi \circ i(a)=\psi(a), \quad \forall a\in \mathfrak{a}.$$

因而

$$\rho(ab)=\psi(ab)=\psi(a)\psi(b)=\rho(a)\rho(b),$$

故(ρ,V)也是结合代数 $\mathfrak{a}$ 的表示. ▌

用上面方法不难得到下面引理.

引理 6.6.3 设 $\mathfrak{g}$ 是域 F 上的李代数,其通用包络代数为 $U(\mathfrak{g})$. 若 V 是 $\mathfrak{g}$-模,则 V 有自然的 $U(\mathfrak{g})$-模结构. 反之,若 V 是 $U(\mathfrak{g})$-模,则 V 也是 $\mathfrak{g}$-模,而且 V 作为 $\mathfrak{g}$-模与 $U(\mathfrak{g})$-模时,其可约性,不可约性与完全可约性是一致的.

证 读者可自行完成. ▌

定理 6.6.4 设 $\mathfrak{a}$ 是域 F 上的结合代数,$\mathfrak{b}$ 为其子代数,V 是 $\mathfrak{b}$-模. 记

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}V&=\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V\\&=\mathfrak{a}\otimes_F V/L\{ab\otimes v-a\otimes bv\mid a\in\mathfrak{a},b\in\mathfrak{b},v\in V\},\end{aligned}$$

这里 $\mathfrak{a}\otimes_F V$ 表示 F 上的线性空间 $\mathfrak{a}\otimes V$, $L\{x\mid\cdot\}$表示由$\{x\mid\cdot\}$张成的子空间,则

1) 在 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 中可定义 $\mathfrak{a}$-模结构,称为由 $\mathfrak{b}$-模 V 诱导的 $\mathfrak{a}$-模,简称**诱导模**.

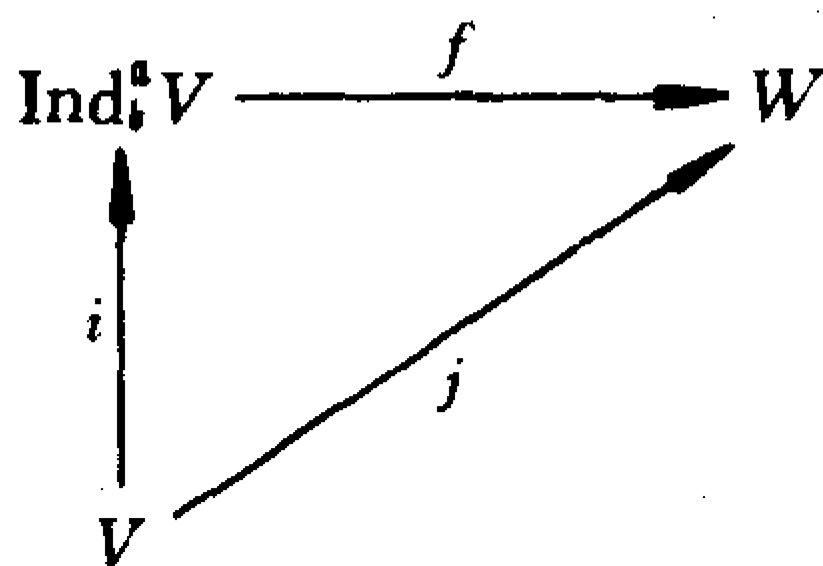
2) 有 V 到 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 的 $\mathfrak{b}$-模同态 i 满足

$$i(v)=1\otimes v,\quad v\in V.$$

3) 若 W 是 $\mathfrak{a}$-模,j 是 V 到 W 的 $\mathfrak{b}$-模同态,那么,存在 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 到 W 的 $\mathfrak{a}$-模同态 f 使得

$$j=f\circ i,$$

即右图为同态交换图.



证 1) 设 $a\otimes v\in\mathfrak{a}\otimes V$. 我们仍以 $a\otimes v$ 代表在 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 中的元素. 但注意

$$ab\otimes v=a\otimes bv,\quad \forall a\in\mathfrak{a},b\in\mathfrak{b},v\in V.$$

可在 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 中定义 $\mathfrak{a}$ 的作用满足线性性及

$$c(a\otimes v)=ca\otimes v,\quad \forall c\in\mathfrak{a}.$$

显然,对此作用,$\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 为 $\mathfrak{a}$-模.

2) 作 V 到 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 中的映射 i：

$$i(v)=1\otimes v,\quad \forall v\in V.$$

于是 i 是线性的，且

$$i(bv)=1\otimes bv=b\otimes v=b\cdot(1\otimes v)=b(i(v)),\quad \forall b\in\mathfrak{b},v\in V.$$

故 i 是 $\mathfrak{b}$-模同态.

3) 定义 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 到 W 的线性映射 f 使其满足

$$f(a\otimes v)=aj(v),\quad \forall a\in\mathfrak{a},v\in V.$$

首先需要验证 f 定义的合理性，即单值性. 设 $a\in\mathfrak{a},b\in\mathfrak{b},v\in V$. 于是在 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 中，$ab\otimes v=a\otimes bv$，而 $j(bv)=bj(v)$. 于是

$$f(ab\otimes v)=abj(v)=aj(bv)=f(a\otimes bv),$$

因而 f 确为线性映射. 再由

$$f(c(a\otimes v))=f(ca\otimes v)=caj(v)=c(aj(v))=cf(a\otimes v),$$
$$\forall c,a\in\mathfrak{a},v\in V$$

知 f 是 $\mathfrak{a}$-模同态. 又

$$f(i(v))=f(1\otimes v)=1\cdot j(v)=j(v),\quad \forall v\in V,$$

知结论 3)成立. ▌

定义 6.6.2 设 M 是 Abel 群. $\mathfrak{a},V$ 分别是域 F 上关于 M 的阶化结合代数，阶化线性空间，且 $\mathfrak{a}=\sum\limits_{\lambda\in M}\mathfrak{a}_\lambda,V=\sum\limits_{\mu\in M}V_\mu$. 又 V 为 $\mathfrak{a}$-模，且满足

$$\mathfrak{a}_\lambda V_\mu\subseteq V_{\lambda+\mu},\quad \forall\lambda,\mu\in M,$$

则称 V 为**关于 M 的阶化 $\mathfrak{a}$-模**，简称**阶化模**.

定理 6.6.5 设 M 为 Abel 群，$\mathfrak{a}$ 是 F 上关于 M 的阶化结合代数，$\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的阶化子代数，V 是阶化 $\mathfrak{b}$-模. 则诱导模 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 是阶化 $\mathfrak{a}$-模.

证 由 $\mathfrak{a}=\sum\limits_{\lambda\in M}\mathfrak{a}_\lambda,V=\sum\limits_{\mu\in M}V_\mu$ 是关于 M 阶化的，故

$$\mathfrak{a}\otimes_F V=\sum_{\alpha\in M}\Big(\sum_{\lambda+\mu=\alpha}\mathfrak{a}_\lambda\otimes V_\mu\Big)=\sum_{\alpha\in M}(\mathfrak{a}\otimes_F V)_\alpha$$

也是关于 M 的阶化线性空间. 又若 $b\in\mathfrak{a}_{\lambda_2}\cap\mathfrak{b},a\in\mathfrak{a}_{\lambda_1},v\in V_\mu$，则

$$ab\otimes v\in\mathfrak{a}_{\lambda_1+\lambda_2}\otimes V_\mu\subseteq(\mathfrak{a}\otimes V)_{\lambda_1+\lambda_2+\mu},$$

$$a\otimes bv\in \mathfrak{a}_{\lambda_1}\otimes \mathfrak{b}_{\lambda_2}V_{\mu}\subseteq \mathfrak{a}_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2+\mu}\subseteq (\mathfrak{a}\otimes V)_{\lambda_1+\lambda_2+\mu}.$$

故 $L\{ab\otimes v-a\otimes bv \mid a\in \mathfrak{a},b\in \mathfrak{b},v\in V\}$ 为 $\mathfrak{a}\otimes_F V$ 的阶化子空间. 再由 $c(a\otimes v)=ca\otimes v,\forall a,c\in \mathfrak{a},\ v\in V$,我们可知 $\mathfrak{a}\otimes_{\mathfrak{b}}V$ 是阶化 $\mathfrak{a}$-模. ▌

从结合代数的诱导模,我们可以平行地构造李代数的诱导模.

定理 6.6.6 设 $\mathfrak{g}$ 为域 F 上的李代数,$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数. $U(\mathfrak{g}),U(\mathfrak{h})$分别为 $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ 的通用包络代数. 又 V 为 $\mathfrak{h}$-模,则

1) 在线性空间

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{h})}V$$

上可定义 $\mathfrak{g}$ 的作用,使其成为 $\mathfrak{g}$-模,称为 **$\mathfrak{h}$-模 V 的诱导 $\mathfrak{g}$-模**,或简称为**诱导模**.

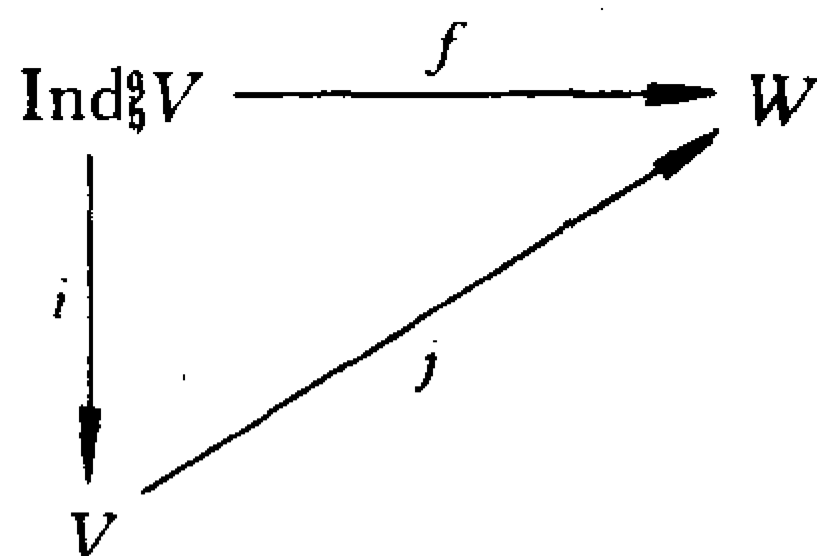
2) 存在 V 到 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V$ 的 $\mathfrak{h}$-模同态 i,满足

$$i(v)=1\otimes v,\quad \forall v\in V.$$

3) 若 W 为 $\mathfrak{g}$-模,又 j 为 V 到 W 的 $\mathfrak{h}$-模同态,则有 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V$ 到 W 的 $\mathfrak{h}$-模同态 f,满足

$$j=f\circ i,$$

即右面的映射图为交换图.



4) 若 $\mathfrak{g}$ 为关于 Abel 群 M 的阶化李代数,$\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的阶化子代数,V 为阶化 $\mathfrak{h}$-模,则诱导模 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V$ 为阶化 $\mathfrak{g}$-模.

证 由引理 6.6.3 知 $\mathfrak{h}$-模 V 也是$U(\mathfrak{h})$-模. 故由定理 6.6.4 知 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{h})}V$ 为 $U(\mathfrak{g})$-模,因而也是 $\mathfrak{g}$-模. 由定理 6.6.4 与定理 6.6.5 知结论 2)—4)也成立. ▌

下面我们讨论一种特殊的情形.

定理 6.6.7 设 $\mathfrak{k},\mathfrak{h}$ 均为李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数,且 $\mathfrak{g}$ 有线性空间的直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{h}.$$

又 V 为 $\mathfrak{h}$-模,则线性空间 $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{h})}V$ 与线性空间 $U(\mathfrak{k})\otimes_F V$ 同构.

证 由 PBW 定理(定理 4.6.5)知,$U(\mathfrak{k})\otimes U(\mathfrak{h})$到 $U(\mathfrak{g})$有线性同构映射 φ,使得 $\varphi(a\otimes b)=ab$, $\forall a\in U(\mathfrak{k}),b\in U(\mathfrak{h})$. 于是

$$U(\mathfrak{g})\otimes_F V=L\{ab\otimes v\mid a\in U(\mathfrak{k}),b\in U(\mathfrak{h}),v\in V\}.$$

但作为 $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{h})}V$ 中元素 ,有

$$ab\otimes v=a\otimes bv.$$

因而

$$U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{h})}V=L\{a\otimes v\mid a\in U(\mathfrak{k}),v\in V\}.$$

故有 $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{h})}V$ 到 $U(\mathfrak{k})\otimes_F V$ 中的线性同构映射 ψ,使得

$$\psi(x\otimes v)=x\otimes v,\quad x\in U(\mathfrak{k}).\quad \blacksquare$$

由此定理,可将 $U(\mathfrak{k})\otimes_F V$ 与 $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{h})}V$ 等同起来. 于是 $U(\mathfrak{k})\otimes_F V$ 是 $\mathfrak{g}$-模. $\mathfrak{g}$ 在其上的作用满足下面性质:

1) 若 $a\in\mathfrak{k}$,则

$$a(x\otimes v)=ax\otimes v,\quad \forall x\otimes v\in U(\mathfrak{k})\otimes V;$$

2) 若 $b\in\mathfrak{h},x\in U(\mathfrak{k})$,且$[b,x]=\sum_i k_ih_i$,其中 $k_i\in U(\mathfrak{k}),h_i\in U(\mathfrak{h})$,则

$$b(x\otimes v)=x\otimes bv+\sum_i b_i\otimes h_iv,\quad \forall v\in V.$$

3) 若 $\mathfrak{k}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想,则

$$b(x\otimes v)=[b,x]\otimes v+x\otimes bv,\quad \forall b\in\mathfrak{h},x\otimes v\in U(\mathfrak{k})\otimes V.$$

例 6.6.1 设 H 为 $2n+1$ 维的 Heisenberg 李代数(参见第一章§4 的习题 3). 记

$$x_i=E_{1,i+1},1\leqslant i\leqslant n,\quad y_i=E_{i+1,n+2},1\leqslant i\leqslant n,\quad z=E_{n+2,n+2}.$$

于是有

$$[x_i,y_j]=\delta_{ij}z,\quad [x_i,x_j]=[y_i,y_j]=[z,H]=0.$$

令

$$\mathfrak{h}=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,z),\quad \mathfrak{k}=L(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

$\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的理想与子代数,且

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\dotplus\mathfrak{h}.$$

又设 $c\in\boldsymbol{C},c\neq0.V$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上一维线性空间,v 是 V 的基且有 $\mathfrak{h}$-模结

构：

$$z\cdot v=cv,\quad x_i\cdot v=0.$$

由 $\mathfrak{h}$-模 V 诱导的 H-模 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{H}V$ 线性同构于 $U(\mathfrak{b})\otimes V$，因 $\dim V=1$，故 $U(\mathfrak{b})\otimes V$ 线性同构于 $U(\mathfrak{b})$，于是 $U(\mathfrak{b})$ 为 H-模. 由例 4.6.2 与定理 4.5.3 知 $U(\mathfrak{b})$ 同构于 $\boldsymbol{C}$ 上 n 元多项式代数 $\boldsymbol{C}[y_1,y_2,\cdots,y_n]$. 注意，这里 $y_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为不定元，不理解为矩阵. 此时 H 在 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{H}V=\boldsymbol{C}[y_1,y_2,\cdots,y_n]$ 上的作用为：

$$y_i(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_i^{k_i}\cdots y_n^{k_n})=y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_i^{k_i+1}\cdots y_n^{k_n};$$

（即为多项式的乘法）

$$\begin{aligned}z(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n})&=z(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n}\otimes v)\\&=c(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n});\end{aligned}$$

（即乘以常数 c）

$$\begin{aligned}&x_i(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n})\\&\quad=[x_i,y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n}]\otimes v+y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_n^{k_n}\otimes x_iv\\&\quad=ck_iy_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_i^{k_i-1}\cdots y_n^{k_n}\\&\quad=c\frac{\partial}{\partial y_i}(y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_i^{k_i}\cdots y_n^{k_n}).\end{aligned}$$

$\left(\text{即为 } c\dfrac{\partial}{\partial y_i}\text{的作用.}\right)$

显然，这个表示是 H 的无限维不可约表示. ▌

我们很容易将这个例子推广到无限维的 Heisenberg 代数上去. 这种表示在 Kac-Moody 代数与顶点算子代数理论中，在物理中都有重要的应用.

习　题

1. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 又 V_1,V_2 是同构的 $\mathfrak{h}$-模. 试证 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V_1$ 与 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V_2$ 是同构的 $\mathfrak{g}$-模.

2. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 又 $\mathfrak{h}$-模 V 有子模直和分解 $V=V_1\dotplus V_2$. 试证 $\mathfrak{g}$-模 $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V$ 有子模直和分解

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V_1\dotplus\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V_2.$$

3. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数，V_1,V_2 为 $\mathfrak{h}$-模. 又 $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(V_1,V_2)$. 试证存在 $\widetilde{\varphi}\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V_1,\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}V_2)$使得

$$\widetilde{\varphi}(a\otimes v_1)=a\otimes\varphi(v_1).$$

§7　不可约表示的存在性

设 $\mathfrak{h}$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，$\Delta,\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$分别为根系与素根系. P,P^+分别为权格与支配权格. 我们知道，$\mathfrak{g}$ 的一个有限维不可约表示由此表示的最高权决定. 最高权一定是 P^+中元素. 本节将证明对于 P^+中每个元素，一定存在 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示以其为最高权. 这样，复半单李代数的有限维不可约表示的分类问题就完全解决了.

设 Δ_+为正根系，$\mathfrak{g}$ 的 Borel 子代数为

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha\in\Delta_+}\mathfrak{g}_\alpha.$$

又

$$\mathfrak{n}_-=\sum_{\alpha\in\Delta_-}\mathfrak{g}_\alpha$$

是 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数，且 $\mathfrak{g}$ 有线性空间直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\dotplus\mathfrak{b}.$$

又设(x,y)为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 于是可将 $\mathfrak{h}^*$ 与 $\mathfrak{h}$ 等同. 设 $\lambda\in\mathfrak{h}$，V 是 $\mathbf{C}$ 上的一维线性空间，v 是 V 的基. 定义 $\mathfrak{b}$ 在 V 上的作用满足：

$$h\cdot v=(\lambda,h)v,\quad \forall h\in\mathfrak{h};$$

$$e_\alpha\cdot v=0,\quad \forall\alpha\in\Delta_+,e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha.$$

显然，V 是 $\mathfrak{b}$-模.

定义 6.7.1　设 $\mathfrak{b}$-模 V 如上所述. 称 $\mathfrak{b}$-模 V 的诱导 $\mathfrak{g}$-模

$$M(\lambda)=\mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}}V$$

为以 λ 为首权的 $\mathfrak{g}$ 的 **Verma 模**.

引理 6.7.1 设$\mathfrak{h}$是复半单李代数$\mathfrak{g}$的 Cartan 子代数. $\lambda\in\mathfrak{h}$, $M(\lambda)$为$\mathfrak{g}$的 Verma 模.

1) $M(\lambda)$作为$U(\mathfrak{n}_-)$-模同构于$U(\mathfrak{n}_-)$-模$U(\mathfrak{n}_-)$，且v为$M(\lambda)$的生成元，即$M(\lambda)$是由v生成的秩 1 的自由$U(\mathfrak{n}_-)$-模；

2) 若W是$\mathfrak{g}$-模，并存在$w\in W, w\neq 0$使得

$$h\cdot w=(\lambda,h)w,\quad \forall h\in\mathfrak{h},$$
$$e_\alpha w=0,\quad \forall\alpha\in\Delta_+, e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,$$
$$W=U(\mathfrak{g})w,$$

则W是$M(\lambda)$的商模；

3) $M(\lambda)$中有唯一的极大真子模$M'(\lambda)$；

4) 商模$L(\lambda)=M(\lambda)/M'(\lambda)$是不可约$\mathfrak{g}$-模.

证 1) 由$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\dotplus\mathfrak{b}$，于是从定理 6.6.7 知$M(\lambda)$同构于$U(\mathfrak{n}_-)\otimes_F V$，再由$V=Fv$知结论 1)成立.

2) 显然，V到W的映射j：

$$j(xv)=xw,\quad \forall x\in\boldsymbol{C}$$

是$\mathfrak{b}$-模V到$\mathfrak{b}$-模W的模同态. 故由定理 6.6.6 知有$M(\lambda)$到W的$\mathfrak{g}$-模同态f，满足

$$f(a\cdot v)=a\cdot w,\quad \forall a\in U(\mathfrak{n}_-).$$

又由 PBW 定理及W满足的条件知

$$W=U(\mathfrak{g})w=U(\mathfrak{n}_-)w,$$

故f是满同态. 因此W同构于$M(\lambda)/\mathrm{Ker}f$.

3) 由于$M(\lambda)$同构于$U(\mathfrak{n}_-)\otimes V$，故$M(\lambda)$有权子空间分解

$$M(\lambda)=\sum_{\mu\leqslant\lambda}M(\lambda)_\mu,$$

其中

$$M(\lambda)_\mu=L\{e_{-\alpha_{i_1}}e_{-\alpha_{i_2}}\cdots e_{-\alpha_{i_k}}v\mid\lambda-\alpha_{i_1}-\alpha_{i_2}-\cdots-\alpha_{i_k}=\mu\}.$$

设M_1是$M(\lambda)$的子模，且$u\in M_1$. 于是有

$$u=u_{\mu_1}+u_{\mu_2}+\cdots+u_{\mu_s},$$

其中$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$互不相等. 故有$h\in\mathfrak{h}$，使得$(\mu_i,h)\neq(\mu_j,h), i\neq$

$j, 1 \leqslant i, j \leqslant s$. 而对 $1 \leqslant k \leqslant s-1$,

$$h^k \cdot u = (\mu_1, h)^k u_{\mu_1} + (\mu_2, h)^k u_{\mu_2} + \cdots + (\mu_s, h)^k u_{\mu_s},$$

由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (\mu_1, h) & (\mu_2, h) & \cdots & (\mu_s, h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mu_1, h)^{s-1} & (\mu_2, h)^{s-1} & \cdots & (\mu_s, h)^{s-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

故知 $u_{\mu_1}, u_{\mu_2}, \cdots, u_{\mu_s}$ 可以表示为 $u, h \cdot u, \cdots, h^{s-1} \cdot u$ 的线性组合,因而 $u_{\mu_i} \in M_1, 1 \leqslant i \leqslant s$. 于是

$$M_1 = \sum_{\mu \leqslant \lambda} M(\lambda)_\mu \cap M_1.$$

若 M_1 为真子模,则 $M(\lambda)_\lambda \not\subset M_1$. 由此可知真子模之和仍为真子模,因而 $M(\lambda)$ 中有唯一的极大真子模 $M'(\lambda)$.

4) 若 $L(\lambda) = M(\lambda)/M'(\lambda)$ 是可约的,则有非平凡子模 L_1. 又设 π 为 $M(\lambda)$ 到 $L(\lambda)$ 的自然同态,则 $M(\lambda)$ 中有子模 $\pi^{-1}(L_1)$ 满足

$$M(\lambda) \supset \pi^{-1}(L_1) \supset M'(\lambda),$$

这与 $M'(\lambda)$ 的极大性矛盾. 故 $L(\lambda)$ 是不可约的. ▌

推论 $\pi(v) \in L(\lambda)$,满足

$$h \cdot \pi(v) = (\lambda, h) \cdot \pi(v), \quad \forall h \in \mathfrak{h};$$

$$e_\alpha \cdot \pi(v) = 0, \quad \forall \alpha \in \Delta_+, e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha;$$

$$L(\lambda) = U(\mathfrak{n}_-) \cdot \pi(v).$$

证 由 $M(\lambda)$ 的结构,这是显然的. ▌

以下,我们在 $L(\lambda)$ 中仍以 v 来记 $\pi(v)$,称 v 为最高权向量.

定理 6.7.2 设 $\lambda \in P^+$,则 $L(\lambda)$ 是有限维不可约表示,且

$$\dim L(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(\delta + \lambda, \alpha)}{(\delta, \alpha)}.$$

证 我们只要证明 $L(\lambda)$ 是有限维的. 第二个结论为不可约表示的维数公式.

设 v 为 $L(\lambda)$ 的最高权向量. 令

$$v_k=(e_{-\alpha_i})^k v, \quad k=0,1,\cdots,$$

其中 α_i 为素根. $e_{-\alpha_i}\in\mathfrak{g}_{-\alpha_i}, e_{-\alpha_i}\neq 0$. 由于

$$\alpha_i\cdot v=(\lambda,\alpha_i)v, \quad e_{\alpha_i}\cdot v=0.$$

故由定理 3.1.3 的证明知

$$\begin{aligned} e_{\alpha_i}\cdot v_k &=\left(k(\lambda,\alpha_i)-\frac{1}{2}k(k-1)(\alpha_i,\alpha_i)\right)v_{k-1} \\ &=\frac{k(\alpha_i,\alpha_i)}{2}((\lambda,\alpha_i^\vee)-k+1)v_{k-1}. \end{aligned}$$

于是,当 $k_0=(\lambda,\alpha_i^\vee)+1$ 时,

$$e_{\alpha_i}(e_{-\alpha_i})^{k_0}v=0.$$

显然,$j\neq i$ 时,

$$e_{\alpha_j}(e_{-\alpha_i})^{k_0}v=0.$$

令 $v_1=(e_{-\alpha_i})^{k_0}v$,则有 $v_1\in L(\lambda)_{\lambda-k_0\alpha_i}$,且 $e_\alpha v=0$, $\forall\alpha\in\Delta_+$. 于是 $U(\mathfrak{g})v_1$是 $L(\lambda)$的真子模. 由 $L(\lambda)$的不可约性知 $U(\mathfrak{g})v_1=\{0\}$,即

$$e_{-\alpha_i}{}^{(\lambda,\alpha_i^\vee)+1}v=0.$$

容易验证,$e_{\pm\alpha_i}$作用在 $U(\mathfrak{g})$上是局部幂零的. 若 $x,a\in U(\mathfrak{g})$,我们用归纳法可证明

$$x^k a=\sum_{s=0}^{k}C_k^s((\mathrm{ad}x)^s a)x^{k-s}, \quad k\geqslant 0.$$

因此,$e_{\pm\alpha_i}$作用在 $L(\lambda)$上也是局部幂零的. 于是

$$\theta'_{\alpha_i}=\exp e_{\alpha_i}\cdot\exp(-e_{-\alpha_i})\cdot\exp e_{\alpha_i}$$

是 $L(\lambda)$上的可逆线性变换. 可取 $e_{\pm\alpha_i}$满足

$$[e_{\alpha_i},e_{-\alpha_i}]=\alpha_i^\vee.$$

由于对 $L(\lambda)$的任意线性变换 X,Y 有

$$\mathrm{e}^X Y\mathrm{e}^{-X}=\mathrm{e}^{\mathrm{ad}X}\cdot Y,$$

因而,对 $v_\mu\in L(\lambda)_\mu, h\in\mathfrak{h}$,由定理 4.4.1 的证明可知

$$\begin{aligned} h\cdot\theta'_{\alpha_i}v_\mu &=\theta'_{\alpha_i}\theta'^{-1}_{\alpha_i}h\theta'_{\alpha_i}v_\mu=\theta'_{\alpha_i}(\theta_{\alpha_i}(h))v_\mu \\ &=\theta'_{\alpha_i}(r_{\alpha_i}(h))v_\mu=(r_{\alpha_i}(h),\mu)\theta'_{\alpha_i}v_\mu \end{aligned}$$

$$=(h,r_{\alpha_i}(\mu))\theta'_{\alpha_i}v_\mu.$$

故 θ'_{α_i} 为 $L(\lambda)_\mu$ 与 $L(\lambda)_{r_{\alpha_i}\mu}$ 之间的同构映射. 令 Λ 为 $L(\lambda)$ 的权系, 于是 $W(\Lambda)=\Lambda$. 设 $\mu\in\Lambda$, 于是存在 $\lambda_1\in W_\mu\cap P^+$. 显然, $\lambda_1\leqslant\lambda$, 因而

$$\Lambda=\bigcup_{\lambda_1\in\Lambda\cap P^+}W\lambda_1.$$

由于 $\lambda_1\leqslant\lambda$, 故知 Λ 是有限集. 又由

$$L(\lambda)_\mu=L\left\{e_{-\alpha_{i_1}}e_{-\alpha_{i_2}}\cdots e_{-\alpha_{i_s}}v\,\middle|\,\lambda-\mu=\sum_{j=1}^{s}\alpha_{i_j}\right\},$$

故 $\dim L(\lambda)_\mu<\infty$. 因此 $\dim L(\lambda)=\sum_{\mu\in\Lambda}\dim L(\lambda)_\mu$ 是有限的. ▌

由 § 6.2 与上面的讨论, 可得下面的定理.

定理 6.7.3 设 P^+ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的支配权格, 则对任一 $\lambda\in P^+$, 在等价意义下存在唯一的以 λ 为最高权的有限维不可约表示, 且 $\mathfrak{g}$ 的任何有限维不可约表示的最高权 $\lambda\in P^+$. ▌

至此, 我们已完全解决了复半单李代数的有限维不可约表示及有限维表示的分类问题.

解决对应于一个支配整线性函数的不可约表示的另一个途径, 需要用到下面的概念.

定义 6.7.2 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$, P^+ 分别为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的素根系, 支配权格. 又 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in P^+$ 满足

$$(\lambda_i,\alpha_j^\vee)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

称以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为最高权的不可约表示 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**基础表示**.

显然, 若 $\lambda\in P^+$, 则有

$$\lambda=\sum_{i=1}^{n}\langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle\lambda_i.$$

首先证明基础表示 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 的存在性. 其次证明在表示的张量积

$$\underbrace{\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_1}_{(\lambda,\alpha_1^\vee)\text{个}}\otimes\underbrace{\rho_2\otimes\cdots\otimes\rho_2}_{(\lambda,\alpha_2^\vee)\text{个}}\otimes\cdots\otimes\underbrace{\rho_n\otimes\cdots\otimes\rho_n}_{(\lambda,\alpha_n^\vee)\text{个}}$$

中必有子表示为以 λ 为最高权的不可约表示. 这就是另一证明定理 6.7.3 的第一个结论的途径.

习　题

1. 设 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的基础表示. 试证 $\mathfrak{g}$ 为单李代数, 则 $\mathrm{Ker}\rho_i=\{0\}(1\leqslant i\leqslant n)$. 反之, 若有某个 i, 使 $\mathrm{Ker}\rho_i=\{0\}$, 则 $\mathfrak{g}$ 为单李代数.

2. 设 $P,\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 分别为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的权格, 素根系. $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in P$, 满足 $(\lambda_i,\alpha_j^\vee)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$, 则称 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为**基础支配整线性函数**. 试证: $\mu\in P$, 可唯一地表示为 $\{\lambda_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 的整系数的线性组合, 即 $\mu=\sum_{i=1}^{n}m_i\lambda_i, m_i\in\mathbf{Z}$, 且 $\mu\in P^+(P^{++})$ 当且仅当 $m_i\in\mathbf{Z}_+(\mathbf{N})$.

3. 设 P 为复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的权格, α 为 $\mathfrak{g}$ 的最高权. 试证: $\alpha\in P^+$, 并当 $\mathfrak{g}$ 为典型单李代数与 G_2 时, 将 α 表示为基础支配整线性函数的组合.

4. 设 U,V 分别为复半单李代数 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1$ 的单模. 试证在 $U\otimes V$ 中有单 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}_1$-模结构, 且 $U\otimes V$ 的最高权为 U,V 最高权的"和".

5. 设 $\mathfrak{g}=sl(n+1,\mathbf{C}),n\geqslant 1;so(n,\mathbf{C}),n\geqslant 3;sp(n,\mathbf{C})$ 时, V 分别为 $\mathbf{C}$ 上 $n+1,n$ 与 $2n$ 维线性空间. 于是 $\mathfrak{g}$ 分别同构于 $sl(V)$, $so(V)$ 与 $sp(V)$. 故 V 为 $\mathfrak{g}$-模. 试证 V 是单 $\mathfrak{g}$-模, 并求 V 的最高权的支配整线性函数的表示.

§8　Levi 分解

一般地讲, 特征为零的域 F 上的李代数可分解为它的根基与一半单子代数的线性空间的直和, 即所谓 Levi 分解. 证明的框架与复半单李代数表示完全可约性的证明框架雷同. 因而, Levi 分解实际上也是李代数表示论在研究一般李代数的结构理论中的应

用.

为方便计,设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\boldsymbol{C}$ 上的李代数.

定理 6.8.1 假设李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基 $\mathfrak{r}$ 为单 $\mathfrak{g}$-模,则 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 通过 $\mathfrak{r}$ 的非本质扩张,即有 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{s}$ 与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 同构,且

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\dotplus\mathfrak{s}.$$

证 1) 不妨设 $\{0\}\subset\mathfrak{r}\subset\mathfrak{g}$. 由 $\mathfrak{r}$ 可解,故 $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]\subset\mathfrak{r}$. 而 $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]$ 为 $\mathfrak{r}$ 的子模,故由 $\mathfrak{r}$ 为单 $\mathfrak{g}$-模,知 $[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]=0$.

2) 若 $C(\mathfrak{g})\neq\{0\}$,则 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$, $\dim\mathfrak{r}=1$. 因而 $\dim\mathfrak{r}>1$ 时, $C(\mathfrak{g})=\{0\}$. 事实上, $C(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{r}$ 的子模,且 $C(\mathfrak{g})$ 的任何子空间均为 $\mathfrak{r}$ 的子模. 故 $C(\mathfrak{g})\neq\{0\}$,有 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$, $\dim\mathfrak{r}=1$.

3) 由于 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}$-模,故由定理 1.7.7 知 $W=\mathrm{End}\mathfrak{g}$ 有 $\mathfrak{g}$-模结构如下:

$$(x\cdot\mathscr{A})y=[x,\mathscr{A}y]-\mathscr{A}[x,y],\quad \forall x,y\in\mathfrak{g},\mathscr{A}\in W. \tag{1}$$

令

$$P=\{\mathrm{ad}x\mid x\in\mathfrak{r}\},$$
$$Q=\{\mathscr{A}\in W\mid\mathscr{A}(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{r},\mathscr{A}|_{\mathfrak{r}}=0\},$$
$$R=\{\mathscr{A}\in W\mid\mathscr{A}(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{r},\mathscr{A}|_{\mathfrak{r}}=\lambda(\mathscr{A})\mathrm{id}_{\mathfrak{r}}\},$$

于是

$$P\subseteq Q\subset R;\quad \dim R=\dim Q+1.$$

4) 若 $C(\mathfrak{g})\neq\{0\}$,由讨论 2)知 $P=\{0\}$.

若 $C(\mathfrak{g})=\{0\}$, 则 ad 是 $\mathfrak{r}$ 到 P 的线性同构,且 $\forall x\in\mathfrak{g},y\in\mathfrak{r}$, 容易算出 $x\cdot\mathrm{ad}y=\mathrm{ad}[x,y]$. 因而 $\mathfrak{r}$ 与 P 是同构的 $\mathfrak{g}$-模.

5) 若 $\mathscr{A}\in R,x,y\in\mathfrak{g}$,由(1)式知

$$(x\cdot\mathscr{A})y=[x,\mathscr{A}y]-\mathscr{A}[x,y]\in\mathfrak{r}.$$

又若 $y\in\mathfrak{r}$,则

$$(x\cdot\mathscr{A})\cdot y=\lambda(\mathscr{A})[x,y]-\lambda(\mathscr{A})[x,y]=0,$$

故 $x\cdot\mathscr{A}\in Q$. 因而 Q,R 均为 W 的子模.

又若 $x\in\mathfrak{r}$,则由上面讨论知

$$x\cdot\mathscr{A}=-\lambda(\mathscr{A})\mathrm{ad}x, \tag{2}$$

于是 R 满足

$$\mathfrak{r}R\subseteq P. \tag{3}$$

6）由讨论5)知 $R/P,Q/P$ 均为 $\mathfrak{g}$-模，且 $\mathfrak{r}$ 在其上的作用是平凡的，即 $\mathfrak{r}$ 在核中，因而 Q/P 与 R/P 可定义为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$-模. 由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的，故在 R/P 中有 Q/P 的一个补子 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$-模. 此模的维数为1，可设为 $\boldsymbol{C}\bar{\mathscr{A}}_0,\mathscr{A}_0\in R,\lambda(\mathscr{A})\neq 0$. $\bar{\mathscr{A}}_0$ 为 $\mathscr{A}_0$ 在商空间 R/P 中对应元素. 显然，$\boldsymbol{C}\bar{\mathscr{A}}_0$ 是平凡 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$-模. 又由(2)知，$\boldsymbol{C}\bar{\mathscr{A}}_0$ 可自然地成为平凡的 $\mathfrak{g}$-模，即 $x\cdot\bar{\mathscr{A}}_0=0,\ \forall x\in\mathfrak{g}$. 等价地，

$$\mathfrak{g}\cdot\mathscr{A}_0\subseteq P.$$

若以 $\mathscr{A}_0/\lambda(\mathscr{A}_0)$ 代替 $\mathscr{A}_0$，我们总可以假定 $\lambda(\mathscr{A}_0)=1$.

故 $\mathfrak{g}\cdot\mathscr{A}_0$ 为 P 的子模. 由(2)式知 $x\cdot\mathscr{A}_0=-\mathrm{ad}x,\ \forall x\in\mathfrak{r}$. 故

$$\mathfrak{g}\cdot\mathscr{A}_0=P.$$

7）设 $C(\mathfrak{g})=\{0\}$，由讨论4)可知 P 与 $\mathfrak{r}$ 是同构的 $\mathfrak{g}$-模. 令

$$\mathfrak{s}=\{y\in\mathfrak{g}\mid y\cdot\mathscr{A}_0=0\},$$

显然，$\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数，而且

$$\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{r}=\dim\mathfrak{s}.$$

又由(2)式知 $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{r}=\{0\}$，于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dotplus\mathfrak{r}$.

8）若 $C(\mathfrak{g})\neq\{0\}$，即 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$. 由于 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$-模 $\mathfrak{g}$ 的子模，$\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{g}=0$，故 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{r}$ 均为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$-模. 由 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 半单，故有 $\mathfrak{r}$ 的补子 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$-模 $\mathfrak{s}$，使得

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dotplus\mathfrak{r}.$$

同样，$\mathfrak{s}$ 也为 $\mathfrak{g}$-模. 故 $\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{s}=\mathfrak{s}$，或 $[\mathfrak{g},\mathfrak{s}]=\mathfrak{s}$. 因此 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，此时，$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{r}$.

综上所述，定理得证. ▍

推论 若 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$，则 $\mathfrak{g}$ 有理想直和分解：

$$\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})\oplus[\mathfrak{g},\mathfrak{g}],$$

其中 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是半单理想.

事实上，定理6.8.1的证明中之讨论8)，只用到 $C(\mathfrak{g})=\mathfrak{r}$ 这一事实. 故

$$\mathfrak{g}=C(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{s},$$

而 $$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=[\mathfrak{s},\mathfrak{s}]=\mathfrak{s}. \quad \blacksquare$$

定理 6.8.2 设 $\mathfrak{a}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想，且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 为半单李代数. 则存在 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{g}_1$，使得 $\mathfrak{g}$ 有线性空间直和分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\dot{+}\mathfrak{g}_1.$$

证 我们对 $\dim\mathfrak{a}$ 用归纳法来证明. 显然，$\dim\mathfrak{a}=1$ 时，$\mathfrak{a}$ 为不可约 $\mathfrak{g}$-模. 故由定理 6.8.1 知结论成立. 现假设 $\dim\mathfrak{a}\leqslant n$ 时，结论成立. 要证当 $\dim\mathfrak{a}=n+1$ 时，定理结论成立.

设 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基. 由于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 半单，故由定理 2.1.7 知 $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}/\mathfrak{a}=\{0\}$. 设 π 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 的自然同态，则 $\pi(\mathfrak{r})$ 为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 的可解理想. 故 $\pi(\mathfrak{r})=\{0\}$，即 $\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{a}$.

若 $\mathfrak{a}$ 是半单的，故由定理 1.6.5 知

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}),$$

取 $\mathfrak{g}_1=C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ 即可.

若 $\mathfrak{a}$ 为可解，且为单 $\mathfrak{g}$-模，则 $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}$. 由定理 6.8.1 知结论成立.

现设 $\mathfrak{a}$ 不是单 $\mathfrak{g}$-模，$\mathfrak{a}_1$ 为 $\mathfrak{a}$ 的非平凡子模. 故 $\mathfrak{a}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的理想，且

$$\dim\mathfrak{a}>\dim\mathfrak{a}_1>0.$$

因而 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1$ 有理想 $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1$，且 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1)/(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1)$ 同构于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是半单的，$\dim\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1<\dim\mathfrak{a}$. 由归纳假设，有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1$ 的子代数 $\bar{\mathfrak{g}}$ 使得

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1=\bar{\mathfrak{g}}\dot{+}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_1.$$

设 π_1 为 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_1$ 的自然同态. 于是 $\pi_1^{-1}(\bar{\mathfrak{g}})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子代数，且 $\pi_1^{-1}(\bar{\mathfrak{g}})/\mathfrak{a}_1$ 与 $\bar{\mathfrak{g}}$，从而与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 同构，即为半单李代数. 由 $\dim\mathfrak{a}_1<\dim\mathfrak{a}$，故有 $\pi_1^{-1}(\bar{\mathfrak{g}})$ 的子代数 $\mathfrak{g}_1$ 使得

$$\pi_1^{-1}(\bar{\mathfrak{g}})=\mathfrak{g}_1\dot{+}\mathfrak{a}_1.$$

这时，

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{a}.$$

又 $$\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{a}=\mathfrak{g}_1\cap(\pi_1^{-1}(\bar{\mathfrak{g}})\cap\mathfrak{a})=\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{a}_1=\{0\},$$

于是 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dotplus\mathfrak{a}$. 定理证毕. ▌

定理 6.8.3 设 $\mathfrak{r}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基. 若 $\mathfrak{g}$ 非可解,则存在 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数 $\mathfrak{s}$,使得

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dotplus\mathfrak{r}.$$

证 在定理 6.8.2 中取 $\mathfrak{a}=\mathfrak{r}$,即得此定理. ▌

上述分解称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Levi 分解**,$\mathfrak{s}$ 称为 **Levi 子代数**.

下面我们讨论 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数间的关系.

引理 6.8.4 设 $\mathfrak{g}$ 为复半单李代数,V 为 $\mathfrak{g}$-模. 又 f 为 $\mathfrak{g}$ 到 V 的线性映射,并满足

$$f([x,y])=x\cdot f(y)-y\cdot f(x),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

则存在 $v\in V$,使得

$$f(x)=x\cdot v,\quad \forall x\in\mathfrak{g}.$$

证 设 $\mathfrak{g}$-模 V 有不可约子模分解

$$V=V_1\dotplus V_2\dotplus\cdots\dotplus V_k.$$

于是对 $x\in\mathfrak{g}$,有

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x),\quad f_i(x)\in V_i.$$

因而

$$\begin{aligned} f([x,y]) &= x\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}f_i(y)\right)-y\cdot\left(\sum_{i=1}^{k}f_i(x)\right)\\ &=\sum_{i=1}^{k}(x\cdot f_i(y)-y\cdot f_i(x)). \end{aligned}$$

故
$$f_i([x,y])=x\cdot f_i(y)-y\cdot f_i(x),$$

即 $\mathfrak{g}$ 到 V_i 的线性映射 f_i 亦满足引理条件. 若有 $z_i\in V_i$,使得 $f_i(x)=x\cdot z_i$,则 $f(x)=x\cdot\sum_{i=1}^{k}z_i$. 因而,我们可以假定 V 为单 $\mathfrak{g}$-模. 设 (x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 又 $\mathfrak{g}$ 的基 $\{x_i\}$,$\{y_j\}$ 满足 $(x_i,y_j)=\delta_{ij}$,故 V 的 Casimir 算子 $\sum_i x_iy_i=c\ \mathrm{id}_V$.

$c=0$,当且仅当 $\dim V=1$. 此时 $x\cdot v=0$, $\forall x\in\mathfrak{g},v\in V$. 于是 $f(\mathfrak{g})=f([\mathfrak{g},\mathfrak{g}])=0$,故可取 $v=0$.

设 $c\neq 0$. 令 $v_1=\sum_i x_i f(y_i)$. 若 $x\in\mathfrak{g}$, 且

$$[x,x_i]=\sum_j a_{ij}x_j,$$

于是
$$a_{ij}=([x,x_i],y_j)=-(x_i,[x,y_j]).$$

因而
$$[x,y_i]=-\sum_j a_{ji}y_j.$$

故有

$$\begin{aligned}
x\cdot v_1 &= \sum_i xx_i f(y_i)\\
&= \sum_i x_i x f(y_i)+\sum_i [x,x_i]f(y_i)\\
&= \sum_i x_i x f(y_i)+\sum_i\sum_j a_{ij}x_j f(y_i)\\
&= \sum_i x_i x f(y_i)-\sum_j x_j f\Big(\sum_i(-a_{ij}y_i)\Big)\\
&= \sum_i x_i x f(y_i)-\sum_j x_j f([x,y_j])\\
&= \sum_i (x_i x f(y_i)-x_i x f(y_i)+x_i y_i f(x))\\
&= cf(x).
\end{aligned}$$

故取 $v=\frac{1}{c}v_1$ 即为所求. ▌

定理 6.8.5 设 $\mathfrak{s}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数. $\mathfrak{s}_1$ 为 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数, 则存在 $\theta\in\mathrm{Int}\mathfrak{g}$ 使得 $\theta(\mathfrak{s}_1)\subseteq\mathfrak{s}$. 特别, 若 $\mathfrak{s}_1$ 也是 Levi 子代数, 则 $\theta(\mathfrak{s}_1)=\mathfrak{s}$.

证 设 $\mathfrak{r},\mathfrak{n}$ 分别为 $\mathfrak{g}$ 的根基与幂零根基(参看第二章 §1 的习题 6). 故由第二章 §3 的习题 2 知

$$[\mathfrak{s},\mathfrak{r}]\subseteq\mathfrak{n},\quad [\mathfrak{r},\mathfrak{r}]\subseteq\mathfrak{n}.$$

又由

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\dotplus\mathfrak{r},$$

故有 $\mathfrak{s}_1$ 分别到 $\mathfrak{s},\mathfrak{r}$ 的映射 π_1,π_2 使得

$$x=\pi_1(x)+\pi_2(x),\quad \forall x\in\mathfrak{s}_1.$$

显然, $\pi_1(x)=0$ 当且仅当 $x\in\mathfrak{r}$. 于是 $\mathrm{Ker}\pi_1=\mathfrak{s}_1\cap\mathfrak{r}$. 由于 $\mathfrak{s}_1$ 是半

单的，故 π_1 是一一的. 又由

$$[x,y]=[\pi_1(x),\pi_1(y)]+[\pi_1(x),\pi_2(y)]+[\pi_2(x),\pi_1(y)]$$
$$+[\pi_2(x),\pi_2(y)],\quad \forall x,y\in\mathfrak{s}_1.$$

因而

$$\pi_1([x,y])=[\pi_1(x),\pi_1(y)], \tag{4}$$

$$\pi_2([x,y])=[\pi_1(x),\pi_2(y)]-[\pi_1(y),\pi_2(x)]$$
$$+[\pi_2(x),\pi_2(y)]. \tag{5}$$

特别 $\pi_2([x,y])\in[\mathfrak{s},\mathfrak{r}]+[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]\subseteq\mathfrak{n}$. 于是

$$[x,y]\in\mathfrak{s}+\mathfrak{n}.$$

由于 $\mathfrak{s}_1$ 半单，故$[\mathfrak{s}_1,\mathfrak{s}_1]=\mathfrak{s}_1$. 因而

$$\mathfrak{s}_1\subseteq\mathfrak{s}+\mathfrak{n}.$$

用归纳法证明存在 $\theta\in\operatorname{Int}\mathfrak{g}$，使得

$$\theta(\mathfrak{s}_1)\subseteq\mathfrak{s}+\mathfrak{n}^{(k)},\quad k\in\mathbf{Z}_+.$$

因 $k=0$ 时，$\mathfrak{n}^{(0)}=\mathfrak{n}$，结论成立. 设 k 时结论成立，不妨设

$$\mathfrak{s}_1\subseteq\mathfrak{s}+\mathfrak{n}^{(k)}.$$

由此知 $\pi_2(x)\in\mathfrak{n}^{(k)},\quad \forall x\in\mathfrak{s}_1$. 由(4)式知($\operatorname{ad}\circ\pi_1,\mathfrak{n}^{(k)}$)是 $\mathfrak{s}_1$ 的表示，$\mathfrak{n}^{(k+1)}$为不变子空间. 设 $\bar{z}=z+\mathfrak{n}^{(k+1)}\in\mathfrak{n}^{(k)}/\mathfrak{n}^{(k+1)}$，$z\in\mathfrak{n}^{(k)}$. 于是 $\mathfrak{n}^{(k)}/\mathfrak{n}^{(k+1)}$为 $\mathfrak{s}_1$-模，其模结构为

$$x\cdot\bar{z}=\overline{[\pi_1(x),z]},\quad \forall x\in\mathfrak{s}_1,z\in\mathfrak{n}^{(k)}.$$

令
$$f(x)=\overline{\pi_2(x)},\quad \forall x\in\mathfrak{s}_1,$$

则 f 是 $\mathfrak{s}_1$ 到 $\mathfrak{n}^{(k)}/\mathfrak{n}^{(k+1)}$ 中线性映射，且由(5)式知

$$\begin{aligned}f([x,y])&=\overline{\pi_2([x,y])}\\&=\overline{[\pi_1(x),\pi_2(y)]}-\overline{[\pi_1(y),\pi_2(x)]}\\&=xf(y)-yf(x),\quad \forall x,y\in\mathfrak{s}_1.\end{aligned}$$

于是由引理 6.8.4 知存在 $\bar{z}\in\mathfrak{n}^{(k)}/\mathfrak{n}^{(k+1)}$使得

$$f(x)=\overline{\pi_2(x)}=x\cdot\bar{z}=\overline{[\pi_1(x),z]},$$

即
$$\pi_2(x)-[\pi_1(x),z]\in\mathfrak{n}^{(k+1)},\quad \forall x\in\mathfrak{s}_1,z\in\mathfrak{n}^{(k)},$$

故 $\mathrm{ad}z$ 是幂零的. 于是 $\theta=\exp \mathrm{ad}z\in \mathrm{Int}\mathfrak{g}$, 且

$$\begin{aligned}\theta(x)= &(\exp \mathrm{ad}z)x\\ &=x+[z,\pi_1(x)]+[z,\pi_2(x)]\\ &\quad+\frac{1}{2}[z,[z,x]]+\cdots\\ &\equiv\pi_1(x)+(\pi_2(x)-[\pi_1(x),z])(\mathrm{mod}\ \mathfrak{n}^{(k+1)})\\ &\equiv\pi_1(x)(\mathrm{mod}\ \mathfrak{n}^{(k+1)}),\end{aligned}$$

故

$$\theta(\mathfrak{s}_1)\subseteq\mathfrak{s}+\mathfrak{n}^{(k+1)}.$$

由于 $\mathfrak{n}$ 是幂零的, 故 k 充分大之后 $\mathfrak{n}^{(k)}=\{0\}$. 因而 $\theta(\mathfrak{s}_1)\subseteq\mathfrak{s}$. ▌

习　　题

1. 设 $\mathfrak{r}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基, 且 $\mathfrak{r}$ 为单 $\mathfrak{g}$-模. 试证

1) 若 $\mathfrak{s}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数, 则 $\mathfrak{r}$ 也是单 $\mathfrak{s}$-模;

2) $\mathrm{ad}\mathfrak{g}\subset\mathrm{Der}\mathfrak{g}$.

2. 设 $\mathfrak{r}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的根基, 且 $\mathfrak{r}\subset\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ 为 Heisenberg 代数. 试证 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}\subset\mathrm{Der}\mathfrak{g}$.

3. 设 $\mathfrak{s}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Levi 子代数, 包含 $\mathfrak{s}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的极小理想 $\mathfrak{l}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Levi 理想**. 试证

1) 若 $k\in N$, 使得 $\mathfrak{g}^{(k)}=\mathfrak{g}^{(k+1)}$, 则 $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}^{(k)}$;

2) $\mathfrak{l}=\mathfrak{s}+[\mathfrak{n}_0,\mathfrak{s}]+[\mathfrak{n}_0,[\mathfrak{n}_0,\mathfrak{s}]]+\cdots$, 其中 $\mathfrak{n}_0=[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$;

3) $\mathfrak{l}=\sum\limits_{\theta\in\mathrm{Int}\mathfrak{g}}\theta(\mathfrak{s})$.

第七章　例外单李代数

以 G_2,F_4,E_6,E_7 及 E_8 为素根系的复单李代数，称为**例外复单李代数**. 本章主要讨论如何用线性李代数来实现它们. 前面几章的讨论已经告诉我们以 A_n,B_n,C_n 及 D_n 为素根系的复单李代数分别可以 $sl(n+1,\boldsymbol{C}),so(2n+1,\boldsymbol{C}),sp(n,\boldsymbol{C})$ 及 $so(2n,\boldsymbol{C})$ 来实现. 因而本章实际上完全解决了复单李代数(因而复半单李代数)的实现问题.

§1　李代数 G_2

实现单李代数 G_2 的一个自然办法是寻求 G_2 的维数最低的非平凡的不可约表示 (ρ,V). 于是 $\rho(G_2)\subseteq \mathrm{gl}(V)$，$\rho(G_2)$ 与 G_2 同构. 可以算出 $\dim V=7$. 下面我们给出 G_2 的第一种实现方法.

回忆在定理 3.6.2 中我们给出了 $B_l=so(2l+1,\boldsymbol{C})$ 的结构. 取 $l=3$. 我们将在 $B_3=so(7,\boldsymbol{C})$ 中找出一个子代数与 G_2 同构.

我们在 $so(7,\boldsymbol{C})$ 的 Cartan 子代数

$$\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(0,x_1,x_2,x_3,-x_1,-x_2,-x_3)\,|\,x_i\in\boldsymbol{C}\}$$

中取子代数

$$\mathfrak{h}_0=\left\{\mathrm{diag}(0,x_1,x_2,x_3,-x_1,-x_2,-x_3)\,\middle|\,\sum_{i=1}^{3}x_i=0\right\}.$$

令

$$G_{\lambda_1-\lambda_2}=G'_{\lambda_2-\lambda_1}=E_{23}-E_{65},$$

$$G_{\lambda_1-\lambda_3}=G'_{\lambda_3-\lambda_1}=E_{24}-E_{75},$$

$$G_{\lambda_2-\lambda_3}=G'_{\lambda_3-\lambda_2}=E_{34}-E_{76},$$

则不难证明

$$\mathfrak{h}_0+\sum_{\lambda_i-\lambda_j}CG_{\lambda_i-\lambda_j},\quad i\neq j$$

是一个单子代数同构于 A_2. 再令

$$G_{\lambda_1}=-G'_{-\lambda_1}=\sqrt{2}(E_{12}-E_{51})-(E_{37}-E_{46}),$$

$$G_{\lambda_2}=-G'_{-\lambda_2}=\sqrt{2}(E_{13}-E_{61})-(E_{27}-E_{45}),$$

$$G_{\lambda_3}=-G'_{-\lambda_3}=\sqrt{2}(E_{14}-E_{71})-(E_{26}-E_{35}),$$

则不难证明

$$[G_{\lambda_i},G_{-\lambda_i}]=3(E_{i+1,i+1}-E_{i+4,i+4})-\mathrm{diag}(0,I_3,-I_3),$$

$$[G_{\lambda_i},G_{-\lambda_j}]=3G_{\lambda_j-\lambda_i},\quad (i\neq j)$$

$$[G_{\lambda_i-\lambda_j},G_{\lambda_k}]=-\delta_{ik}G_{\lambda_j},$$

$$[G_{\lambda_i-\lambda_j},G_{-\lambda_k}]=\delta_{jk}G_{-\lambda_i},$$

$$[G_{\lambda_i},G_{\lambda_j}]=-\mathrm{sgn}(i,j,k)2G_{-\lambda_k},$$

$$[G_{-\lambda_i},G_{-\lambda_j}]=\mathrm{sgn}(i,j,k)2G_{\lambda_k},$$

这里

$$\mathrm{sgn}(i,j,k)=\begin{cases}0, & 若\ i,j,k\ 中有相等的,\\ 1, & 若(i,j,k)为偶排列,\\ -1, & 若(i,j,k)为奇排列.\end{cases}$$

因而令 $\Delta=\{\pm\lambda_i,\lambda_i-\lambda_j\mid 1\leqslant i\leqslant 3,j\neq i,1\leqslant j\leqslant 3\}$,

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_0+\sum_{\alpha\in\Delta}CG_\alpha,$$

则 $\mathfrak{g}$ 是 $so(7,C)$ 的一个 14 维子代数.

我们再证明 $V=C^7$ 是不可约 $\mathfrak{g}$-模. 记 V 中典型基 $\{(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ 第 i 个}}{1},0,\cdots,0)'\mid 1\leqslant i\leqslant 7\}$ 为 $\{v_0,v_1,v_2,v_3,v_{-1},v_{-2},v_{-3}\}$.

取 $H=\mathrm{diag}(0,1,2,-3,-1,-2,+3)$, 则 $\{v_i\}$ 为 H 的属于不同值的特征向量. 因而 V 的任何非零子模 V_1 必至少包含一个 v_i. 但由

$$G_{\pm\lambda_i}v_0=\mp\sqrt{2}\,v_{\mp i};\quad G_{-\lambda_i}v_i=-\sqrt{2}\,v_0;$$

$$G_{\lambda_i-\lambda_j}v_j=v_i;\qquad G_{\lambda_i-\lambda_j}v_{-i}=-v_j;$$

$$G_{\pm\lambda_i} v_{\pm j} = \varepsilon v_k, \quad \varepsilon = \pm 1, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

推知 $V_1 = V$,即 V 为单 $\mathfrak{g}$-模.

设 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根基,故 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathrm{gl}(V)$的可解子代数. 由 Lie 定理知,有 $v \in V, v \neq 0$ 使得

$$Rv = \lambda(R)v, \quad \forall R \in \mathfrak{r}.$$

因此

$$V_1 = \{v \in V \mid Rv = \lambda(R)v, \quad \forall R \in \mathfrak{r}\}$$

是 V 的非零子空间. 容易证明 V_1 是 V 的子 $\mathfrak{g}$-模,故 $V_1 = V$. 因而 $\mathfrak{r} \subseteq \boldsymbol{C}I_7$. 但是 $\mathrm{tr}G = 0$, $\forall G \in \mathfrak{g}$,故 $\mathfrak{r} = \{0\}$. 这样我们知道 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数.

由于 $\dim(A_1 \oplus A_1) = 6$; $\dim A_2 = 8$; $\dim B_2 = \dim C_2 = 10$,故 $\mathfrak{g}$ 只能是复单李代数 G_2.

下面我们给出 G_2 的第二种实现方法.

设 V 是 $\boldsymbol{C}$ 上 3 维线性空间, e_1, e_2, e_3 为 V 的基. 在 V 上定义了双线性的数量积与双线性反对称的向量积:设 $u, v \in V$,对应的数量积,向量积分别记为 (u, v), $u \times v$. e_1, e_2, e_3 满足

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant 3;$$

$$e_i \times e_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3;$$

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_3 \times e_1 = e_2, \quad e_2 \times e_3 = e_1.$$

设

$$\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & u \\ v & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \boldsymbol{C}; u, v \in V \right\}.$$

在 $\mathscr{C}$ 中定义加法,数乘,及乘法如下:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & u_1 \\ v_1 & \beta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 & u_2 \\ v_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & u_1 + u_2 \\ v_1 + v_2 & \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix};$$

$$\gamma \begin{pmatrix} \alpha_1 & u \\ v & \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\alpha_1 & \gamma u \\ \gamma v & \gamma\beta_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \boldsymbol{C};$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & u_1 \\ v_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 & u_2 \\ v_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 - (u_1, v_2) & \alpha_1 u_2 + \beta_2 u_1 + v_1 \times v_2 \\ \alpha_2 v_1 + \beta_1 v_2 + u_1 \times u_2 & \beta_1\beta_2 - (v_1, u_2) \end{pmatrix}.$$

由定义可知 $\mathscr{C}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的 8 维线性空间，且 $\mathscr{C}$ 中乘法是双线性的. $\mathscr{C}$ 称为 $\boldsymbol{C}$ 上的 **Cayley 代数**. 显然，$\mathscr{C}$ 有基

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C_{2+i}=\begin{pmatrix}0 & e_i\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$C_{5+i}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ e_i & 0\end{pmatrix},\quad i=1,2,3.$$

$\mathscr{C}$ 中乘法不满足结合律与交换律. 例如

$$C_3C_4=C_8,\quad C_4C_3=-C_8,$$

$$(C_3C_4)C_5=-C_2,\quad C_3(C_4C_5)=-C_1.$$

但是 $\mathscr{C}$ 中乘法满足交错律(alternative law)：

$$x^2y=x(xy),\quad yx^2=(yx)x.$$

令

$$\mathscr{C}_0=\{x\in\mathscr{C}\mid \mathrm{tr}x=0\},$$

于是 $\mathscr{C}_0$ 有基 $C_1-C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7,C_8$. 容易证明

$$\mathscr{C}_0=L\{[x,y]=xy-yx\mid x,y\in\mathscr{C}\},$$

$$\mathscr{C}=\boldsymbol{C}(C_1+C_2)\dotplus\mathscr{C}_0.$$

以 $\mathrm{Der}\mathscr{C}$ 表示 $\mathscr{C}$ 的导子代数，由于 $\forall D\in\mathrm{Der}\mathscr{C},x,y\in\mathscr{C}$ 有

$$D(C_1+C_2)=D(C_1+C_2)^2=0,$$

$$D([x,y])=[Dx,y]+[x,Dy],$$

故 $\boldsymbol{C}(C_1+C_2)$ 与 $\mathscr{C}_0$ 均是 $\mathrm{Der}\mathscr{C}$ 的不变子空间. 于是 $\mathscr{C}_0$ 是 $\mathrm{Der}\mathscr{C}$-模，而且这是单模.

设 $T\in sl(V)(=sl(3,\boldsymbol{C}))$，故有 $T'\in sl(V)$ 使得 $(Tu,v)=(u,T'v)$，$\forall u,v\in V$. 定义 D_T 如下：

$$D_T\begin{pmatrix}\alpha & u\\ v & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & Tu\\ -T'v & 0\end{pmatrix},$$

则 $D_T\in\mathrm{Der}\mathscr{C}$. 故 $\rho(T)=D_T$ 定义了 $sl(3,\boldsymbol{C})$的一个非平凡，因而是忠实的表示. 令 $\mathfrak{m}=\rho(sl(3,\boldsymbol{C}))$，故 $\mathfrak{m}\subseteq\mathrm{Der}\mathscr{C}$.

又设 $x\in\mathscr{C}$，分别以 r_x,l_x 表示 x 的右乘与左乘. 由交错律，容易证明

$$D_{x,y}=[l_x,l_y]+[l_x,r_y]+[r_x,r_y]\in \mathrm{Der}\mathscr{C}.$$

特别取

$$C_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad C_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$u_{12}=\begin{pmatrix}0 & u\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad u_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ u & 0\end{pmatrix},$$

故 $\mathfrak{g}_1=\{D_{C_1,u_{12}}\,|\,u\in V\}$, $\mathfrak{g}_2=\{D_{C_2,u_{21}}\,|\,u\in V\}$ 为 $\mathrm{Der}\mathscr{C}$ 的子空间. 容易证明 $\dim(\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2+\mathfrak{m})=14$.

又 $T\in sl(V)$,满足

$$Te_i=\lambda_i e_i,\quad i=1,2,3,$$

则

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0.$$

此时,D_T 在基$\{C_1-C_2,C_i,3\leqslant i\leqslant 8\}$的矩阵为

$$\mathrm{diag}(0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,-\lambda_1,-\lambda_2,-\lambda_3).$$

因而 $sl(V)$的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 在 ρ 下的像

$$\rho(\mathfrak{h})=H=\{\mathrm{diag}(0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,-\lambda_1,-\lambda_2,-\lambda_3)\,|\,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\}.$$

容易验证

$$C_{\mathrm{Der}\mathscr{C}}(H)=H,$$

因而 H 为 $\mathrm{Der}\mathscr{C}$ 的 Cartan 子代数. 故

$$C(\mathrm{Der}\mathscr{C})\subseteq C_{\mathrm{Der}\mathscr{C}}(H)=H\subseteq M,$$

$$C(\mathrm{Der}\mathscr{C})\subseteq C(M)=\{0\}.$$

由 $\mathscr{C}_0$ 为单模,故 $\mathrm{Der}\mathscr{C}$ 是半单的. 注意到 $\dim H=2$, $\dim\mathrm{Der}\mathscr{C}\geqslant 14$. 故 $\mathrm{Der}\mathscr{C}$ 只能是 G_2,且 $\dim\mathrm{Der}\mathscr{C}=14$.

本节的讨论,尤其是以 Cayley 代数的导子代数实现 G_2 的讨论中许多证明的细节都略去了. 读者均可作为练习自行完成.

§2 Clifford 代数

为了讨论 F_4 与 E_6,E_7,E_8 的实现,这节我们介绍一下 Clifford

代数.这类代数在李群,李代数,几何学及物理学中都有重要的应用.

设 V 是域 F 上的 n 维线性空间. $B(x,y)$是 V 上的对称双线性函数.又以 $T(V)$表示由 V 生成的张量代数,于是,$T^0V=F$,$T^1V=V$,且

$$T(V)=T^0V\dot{+}T^1V\dot{+}\cdots\dot{+}T^kV\dot{+}\cdots.$$

定义 7.2.1 设 $V,B(x,y)$与 $T(V)$如上所述.又设 K 为由 $\{x\otimes x-B(x,x)1\mid x\in V\}$生成的 $T(V)$理想.我们称商代数

$$\mathrm{Cl}(V,B)=T(V)/K$$

为结合于 B 的 V 的 **Clifford 代数**.

令

$$T_+=\sum_{k=0}^{\infty}T^{2k}V,\quad T_-=\sum_{k=0}^{\infty}T^{2k+1}V,$$

于是

$$T(V)=T_+\dot{+}T_-$$

是 $T(V)$的 $\mathbf{Z}_2$ 阶化.注意到,$x\otimes x-B(x,x)1\in T_+$,所以

$$K=K_+\dot{+}K_-,\quad K_\pm=K\cap T_\pm.$$

因而

$$\mathrm{Cl}(V,B)=\mathrm{Cl}^+(V,B)\dot{+}\mathrm{Cl}^-(V,B),$$
$$\mathrm{Cl}^\pm(V,B)=T_\pm/K_\pm$$

为 $\mathrm{Cl}(V,B)$的 $\mathbf{Z}_2$ 阶化.

设 $x\in\mathrm{Cl}(V,B)$,则有 $x_\pm\in\mathrm{Cl}^\pm(V,B)$使得 $x=x_++x_-$.定义 $\overline{x}=x_+-x_-$,则我们容易证明 $x\to\overline{x}$ 是 $\mathrm{Cl}(V,B)$的对合自同构,称为$\mathrm{Cl}(V,B)$的**主对合**.

设 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 为 V 的一组基,于是 $v\in V$ 有 $v=\sum\lambda_iv_i$,因而由

$$\begin{aligned}v\otimes v-B(v,v)1&=\sum_{i,j}(\lambda_i\lambda_j(v_i\otimes v_j-B(v_i,v_j)1)\\&=\sum_i\lambda_i^2(v_i\otimes v_i-B(v_i,v_i)1)\end{aligned}$$

$$+\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j(v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i-2B(v_i,v_j)1)$$

知 K 也是由 $\{v_i\otimes v_i-B(v_i,v_i)1, v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i-2B(v_i,v_j)1\}$ 生成的理想.

设 f 为 $T(V)$ 到 $T(V)/K$ 的自然同态,则 f 在 T^0V+T^1V 上的限制是一一的. 故可将 1 与 V 嵌入到 $\mathrm{Cl}(V,B)$ 中,于是 $\mathrm{Cl}(V,B)$ 由 $1,V$ 生成. 特别记 $f(x\otimes y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in T(V)$.

我们特别感兴趣的是 $B(x,y)$ 非退化的情形,而且在 V 中有基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 使得

$$B(e_i,e_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

因而 K 为 $\{e_i\otimes e_i-1, e_i\otimes e_j+e_j\otimes e_i\}$ 生成的理想. 此时,将 $\mathrm{Cl}(V,B)$ 简记为 $\mathrm{Cl}(V)$.

定理 7.2.1 设线性空间 V 的基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 满足 $B(e_i,e_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$,$B$ 为 V 的对称双线性函数,则 V 的 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V)$ 由 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 生成,且

$$e_i^2=1,\quad i=1,2,\cdots,n; \tag{1}$$

$$e_ie_j=-e_je_i,\quad i\neq j, 1\leqslant i,j\leqslant n. \tag{2}$$

并且 $\mathrm{Cl}(V)$ 有基

$$\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_s} \mid 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n; 1\leqslant s\leqslant n\};$$

$$\dim \mathrm{Cl}(V)=2^n. \tag{3}$$

证 由 $\mathrm{Cl}(V)$ 的定义易知(1),(2)两式成立,并且 $\mathrm{Cl}(V)$ 由 $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_s} \mid 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n; 1\leqslant s\leqslant n\}$ 线性生成,故只要证明(3),则这组向量为基.

对 $\dim V=n$ 用归纳法来证明.

当 $n=1$ 时,$\mathrm{Cl}(V)=L(1,e_1)$,结论成立.

设 $n=k$ 时,结论成立. 现证 $n=k+1$ 时结论也成立. 令 $V_1=L(e_1,e_2,\cdots,e_k)$,于是

$$\mathrm{Cl}(V)=\mathrm{Cl}(V_1)+\mathrm{Cl}(V_1)e_{k+1}.$$

设 $x\in \mathrm{Cl}(V_1)\cap \mathrm{Cl}(V_1)e_{k+1}$,故有 $y\in \mathrm{Cl}(V_1)$ 使得

$$x=ye_{k+1}.$$

两边右乘 e_{k+1},则有

$$xe_{k+1}=y.$$

因而

$$(x-y)(1+e_{k+1})=0.$$

再令 $V_2=L(e_1,e_2,\cdots,e_{k-1})$,则由 $\mathrm{Cl}(V_1)=\mathrm{Cl}(V_2)+\mathrm{Cl}(V_2)e_k$ 知有 $u,v\in\mathrm{Cl}(V_2)$ 使得 $x-y=u+ve_k$,因而

$$(u+ve_k)(1+e_{k+1})=0. \tag{4}$$

两边右乘以 e_k 得

$$(ue_k+v)(1-e_{k+1})=0.$$

两边以主对合作用之,得

$$(-\bar{u}e_k+\bar{v})(1+e_{k+1})=0. \tag{5}$$

注意到 $u,v\in\mathrm{Cl}(V_2)$,故 $e_k\bar{u}=ue_k,e_k\bar{v}=ve_k$. 故(5)式左乘 e_k,得

$$(-u+ve_k)(1+e_{k+1})=0. \tag{6}$$

(4)式与(6)式相加减,得

$$2ve_k(1+e_{k+1})=0;\quad 2u+2ue_{k+1}=0.$$

令 $V_3=L(e_1,e_2,\cdots,e_{k-1},e_{k+1})$. 由 $2u+2ue_{k+1}\in\mathrm{Cl}(V_3)$ 知 $u=0$. 又 $2v(1-e_{k+1})\in\mathrm{Cl}(V_3)$,故 $v=0$,即有 $x-y=0$,于是 $x=y$. 由此得 $x=xe_{k+1},xe_k=(xe_k)e_{k+1}=-xe_{k+1}e_k=-xe_k$,即 $xe_k=-xe_k$. 两边右乘 e_k,得 $x=-x$,故 $x=y=0$,因此 $\mathrm{Cl}(V_1)\cap\mathrm{Cl}(V_1)e_{k+1}=\{0\}$. 又 $r_{e_{k+1}}$ 为 e_{k+1} 的右乘变换,则 $r_{e_{k+1}}(\mathrm{Cl}(V_1))=\mathrm{Cl}(V_1)e_{k+1},r_{e_{k+1}}^2=\mathrm{id}$. 故

$$\dim\mathrm{Cl}(V)=2\cdot\dim\mathrm{Cl}(V_1)=2^{k+1}.$$

由此知,定理成立. ▌

引理 7.2.2 设 V 是域 F 上 n 维线性空间. $B(x,y)$ 是 V 上对称双线性函数. 又 A 是 F 上的结合代数,f 是 V 到 A 的线性映射,满足

$$(f(x))^2=B(x,x)1_A,\quad \forall x\in V,$$

其中 1_A 为 A 的单位元素，则存在 $\mathrm{Cl}(V,B)$ 到 A 的唯一的代数同态 g，使得

$$g|_V=f.$$

证 由定理 4.5.3 知，有唯一的 $T(V)$ 到 A 的代数同态 f' 使得

$$f'|_V=f,\quad f'(1)=1_A.$$

因而由 $(f(x))^2=(f'(x))^2=B(x,x)1_A$ 知 $\{x\otimes x-B(x,x)1\mid x\in V\}\subseteq\mathrm{Ker}f'$，即 $K\subseteq\mathrm{Ker}f'$. 故

$$\begin{aligned}A&\cong T(V)/\mathrm{Ker}f'\cong(T(V)/K)/(\mathrm{Ker}f'/K)\\&=\mathrm{Cl}(V,B)/(\mathrm{Ker}f'/K),\end{aligned}$$

即有 $\mathrm{Cl}(V,B)$ 到 A 的同态 g.

由于 V 生成 $\mathrm{Cl}(V,B)$，故 g 是唯一的. ▌

引理 7.2.3 设 V 是 F 上 $n(\geqslant3)$ 维线性空间. 又 $B(x,y)$ 是 V 的非退化的对称双线性函数. 又设 V 的基 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 满足 $B(e_i,e_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$. 令 $V_1=L(e_1,e_2)$；$V_2=L(e_3,e_4,\cdots,e_n)$，则

$$\mathrm{Cl}(V)=\mathrm{Cl}(V_1)\otimes\mathrm{Cl}(V_2).$$

证 我们作如下约定：$V(V_1,V_2)$ 中元素 x 作为 $\mathrm{Cl}(V)$ $(\mathrm{Cl}(V_1),\mathrm{Cl}(V_2))$ 中元素记为 $x(x',x'')$.

令 $d=e_1e_2$. 于是 $d^2=-1$，

$$d(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2)=-\lambda_1e_2+\lambda_2e_1=-(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2)d,$$

$$d\Big(\sum_{i=3}^n\lambda_ie_i\Big)=\Big(\sum_{i=3}^n\lambda_ie_i\Big)d,$$

$$-(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2)\Big(\sum_{i=3}^n\lambda_ie_i\Big)=\Big(\sum_{i=3}^n\lambda_ie_i\Big)(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2).$$

因此

$$y(dz)=(dz)y,\quad\forall y\in V_1,z\in V_2,$$

$$(dz)^2=-z^2=-B(z,z)1.$$

设 V_i 到 $\mathrm{Cl}(V)$ 的映射 f_i 满足

$$f_1(y)=y, \quad \forall y\in V_1,$$
$$f_2(z)=\sqrt{-1}dz, \quad \forall z\in V_2.$$

于是

$$(f_1(y))^2=y^2=B(y,y)1, \quad \forall y\in V_1,$$
$$(f_2(z))^2=B(z,z)1, \quad \forall z\in V_2.$$

因而由引理 7.2.2 有 $\mathrm{Cl}(V_i)$到 $\mathrm{Cl}(V)$的同态 g_i 使得

$$g_1(y')=y, \quad \forall y\in V_1,$$
$$g_2(z'')=\sqrt{-1}dz, \quad \forall z\in V_2,$$

且

$$g_1(y')g_2(z'')=g_2(z'')g_1(y'), \quad \forall y'\in V_1, z''\in V_2.$$

又 V_1,V_2 分别生成 $\mathrm{Cl}(V_1),\mathrm{Cl}(V_2)$,故上式对 $\mathrm{Cl}(V_1),\mathrm{Cl}(V_2)$中任何元素 y',y''均成立. 故 $g=g_1\otimes g_2$ 是 $\mathrm{Cl}(V_1)\otimes\mathrm{Cl}(V_2)$到 $\mathrm{Cl}(V)$的同态,显然,g_i 都是一一的,故 g 也是一一的. 由

$$\dim(\mathrm{Cl}(V_1)\otimes\mathrm{Cl}(V_2))=2^2\cdot 2^{n-2}=2^n=\dim(\mathrm{Cl}(V))$$

知 g 是同构映射. ▌

定理 7.2.4 设 V 为域 F 上 $2n$ 维线性空间,则 $\mathrm{Cl}(V)$与 F 上 2^n 阶方阵构成的结合代数 $F^{2^n\times 2^n}$同构.

证 设 $n=1$. 在 V 中取 e_1,e_2 使得 $B(e_i,e_j)=\delta_{ij}$. 设 f 为 V 到 $F^{2\times 2}$的线性映射,满足

$$f(e_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad f(e_2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

则

$$(f(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2))^2=(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

于是,有 $\mathrm{Cl}(V)$到 $F^{2\times 2}$的同态 g,使 $g(e_i)=f(e_i)$. 容易证明,g 是同构映射.

设 $\dim V=2n$ 时,$\mathrm{Cl}(V)$同构于 $F^{2^n\times 2^n}$.

设 $\dim V=2(n+1)$,要证结论成立. 由引理 7.2.3,有 V 的子

空间 V_1, V_2，使得 $\dim V_1=2, \dim V_2=2n$，且

$$\mathrm{Cl}(V)\cong \mathrm{Cl}(V_1)\otimes \mathrm{Cl}(V_2)\cong F^{2\times 2}\otimes F^{2^n\times 2^n}\cong F^{2^{n+1}\times 2^{n+1}}.$$

因而定理成立. ▌

其实，域 $F=C$ 时可明确地给出这个同构映射. 记

$$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

容易验证

$$I_2^2=J_2^2=P^2=Q^2=I_2,$$

$$J_2P+PJ_2=J_2Q+QJ_2=0.$$

又 $C^{2^n\times 2^n}$ 与 $\underbrace{C^{2\times 2}\otimes C^{2\times 2}\otimes\cdots\otimes C^{2\times 2}}_{n\text{个}}$ 同构. 作 V 到 $C^{2\times 2}\otimes C^{2\times 2}\otimes\cdots\otimes C^{2\times 2}$ 的线性映射 f 使得

$$f(e_i)=\underbrace{J_2\otimes\cdots\otimes J_2}_{i-1\text{个}}\otimes P\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,\quad 1\leqslant i\leqslant n;$$

$$f(e_{n+i})=\underbrace{J_2\otimes\cdots\otimes J_2}_{i-1\text{个}}\otimes Q\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

容易验证

$$f\Big(\sum_{i=1}^{2n}\lambda_i e_i\Big)^2=\Big(\sum_{i=1}^{2n}\lambda_i^2\Big)I_{2n}.$$

于是 f 可开拓为 $\mathrm{Cl}(V)$ 到 $C^{2\times 2}\otimes\cdots\otimes C^{2\times 2}$ 的同态. 又因维数关系，故 f 为同构映射.

由于 $\mathrm{Cl}(V)$ 为结合代数，在 $\mathrm{Cl}(V)$ 中有自然的括积 $[x,y]=xy-yx$ $(\forall x,y\in \mathrm{Cl}(V))$ 使 $\mathrm{Cl}(V)$ 为李代数.

定理 7.2.5 李代数 $\mathrm{Cl}(V)$ 的子空间

$$\mathrm{Cl}(V)_2=L\{e_ie_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n=\dim V\},$$

$$\mathrm{Cl}(V)_{12}=L\{e_k, e_ie_j \mid 1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant i<j\leqslant n\}$$

均为李代数 Cl(V)的子代数，且它们分别同构于李代数$so(n,\mathbf{C})$与$so(n+1,\mathbf{C})$.

证 显然，若 i,j,k 互不相等，有

$$[e_ie_j,e_je_k]=2e_ie_k.$$

而 i,j,k,l 互不相等，则

$$[e_ie_j,e_ke_l]=0,\quad [e_ie_j,e_ie_j]=0.$$

于是 $\mathrm{Cl}(V)_2$ 是子代数.

设 $\mathrm{Cl}(V)_2$ 到 $so(n,\mathbf{C})$的线性映射 f 满足

$$f(e_ie_j)=2(E_{ij}-E_{ji}).$$

显然，这是线性同构，且由简单的计算知，f 是李代数的同构.

其次，由

$$[e_i,e_j]=e_ie_j-e_je_i;$$

$$[e_i,e_je_k]=0,\quad 若\ i,j,k\ 互不相等;$$

$$[e_i,e_ie_k]=2e_k,\quad 若\ i\neq k$$

知 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$是子代数.

设 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$到 $so(n+1,\mathbf{C})$的线性映射 g 满足

$$g(e_i)=2\sqrt{-1}(E_{1,i+1}-E_{i+1,1}),$$

$$g(e_ie_j)=2(E_{i+1,j+1}-E_{j+1,i+1}).$$

显然，这是线性同构，且由简单的计算知 g 为李代数的同构. ▌

特别，当 $\dim V=2n$ 时，由定理 7.2.4 知，李代数 Cl(V)同构于 $\mathrm{gl}(2^n,\mathbf{C})$. 由定理 7.2.5 知，$\mathrm{Cl}(V)_2$，$\mathrm{Cl}(V)_{12}$均为 $\mathrm{gl}(2^n,\mathbf{C})$的子代数，且分别同构于 $so(2n,\mathbf{C})$与 $so(2n+1,\mathbf{C})$. 这样，我们就得到了 D_n 与 B_n 的 2^n 维表示.

习 题

1. 设 Cl(V)是实 Euclid 空间 V 的 Clifford 代数. $\Gamma=\{g\in \mathrm{Cl}(V)\mid g$可逆，且 $gxg^{-1}\in V,\ \forall x\in V\}$为群，称为**Clifford 群**. 试证由 $\rho(g)(x)=gxg^{-1}$定义的 $\rho(g)$为正交变换，ρ 为 Γ 到 $\mathcal{O}(V)$的

同态.

§3 旋表示

所谓旋表示是 $so(m,\mathbf{C})$的某些基础表示.旋表示不仅在实现例外单李代数中起着关键性的作用,而且在李群,几何及物理中也有不可忽视的地位.

很自然,我们将 $so(m,\mathbf{C})$分成两类来处理.

Ⅰ. $B_n=so(2n+1,\mathbf{C})$ $(n\geqslant 2)$

此时,B_n 的根系为

$$\Delta=\{\pm\lambda_k,\pm(\lambda_i-\lambda_j),\pm(\lambda_i+\lambda_j)\mid 1\leqslant i,j,k\leqslant n,i<j\},$$

素根系为

$$\Pi=\{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_3,\cdots,\lambda_{n-1}-\lambda_n,\lambda_n\}.$$

由于

$$(\lambda_n,\lambda_n)=\frac{1}{2(2n-1)},\quad (\lambda_i-\lambda_{i+1},\lambda_i-\lambda_{i+1})=\frac{1}{2n-1},$$

于是余素根系为

$$\Pi^\vee=\{2(2n-1)(\lambda_i-\lambda_{i+1}),4(2n-1)\lambda_n,1\leqslant i\leqslant n-1\}.$$

由此不难求得基础表示 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 的最高权为

$$\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,\cdots,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1},\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n).$$

定义 7.3.1 以$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$为最高权的基础表示 ρ_n 称为 $so(2n+1,\mathbf{C})$的**旋表示**.以后记为 σ,其最高权记为 ω.

以 Λ_σ 记旋表示 σ 的权系,则

$$\Lambda_\sigma=\left\{\pm\frac{1}{2}\lambda_1\pm\frac{1}{2}\lambda_2\pm\cdots\pm\frac{1}{2}\lambda_n\right\}.$$

Ⅱ. $D_n=so(2n,\mathbf{C})$ $(n\geqslant 4)$

此时,D_n 的根系为

$$\Delta=\{\pm(\lambda_i-\lambda_j),\pm(\lambda_i+\lambda_j)\mid 1\leqslant i<j\leqslant n\},$$

素根系为

$$\Pi=\{\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2-\lambda_3,\cdots,\lambda_{n-1}-\lambda_n,\lambda_{n-1}+\lambda_n\}.$$

由于

$$(\lambda_i,\lambda_j)=\frac{1}{4(n-1)}\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

故余素根系为

$$\Pi^\vee=\{4(n-1)(\lambda_i-\lambda_{i+1}),4(n-1)(\lambda_{n-1}+\lambda_n)\mid 1\leqslant i\leqslant n-1\}.$$

由此不难求得基础表示 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_{n-1},\rho_n$ 的最高权为

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k,\quad 1\leqslant k\leqslant n-2,$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}-\lambda_n),$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}+\lambda_n).$$

定义 7.3.2 以$\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}\pm\lambda_n)$为最高权的基础表示 ρ_n,ρ_{n-1}称为 $so(2n,\boldsymbol{C})$的**旋表示**,分别记为 σ_1,σ_2,其最高权记为 ω_1,ω_2.

以 Λ_{σ_i}记旋表示 σ_i 的权系,则

$$\Lambda_{\sigma_1}=\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_n)\,\middle|\,\text{其中有偶数个“}-\text{”}\right\},$$

$$\Lambda_{\sigma_2}=\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_n)\,\middle|\,\text{其中有奇数个“}-\text{”}\right\}.$$

定理 7.3.1 设 V 是 $2n$ 维的复线性空间,B 为 V 的非退化对称双线性函数. $e_1,e_2,\cdots,e_{2n}$满足 $B(e_i,e_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$,$\mathrm{Cl}(V)$ 为 V 的 Clifford 代数. 又设

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}&0\end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Cl}(V)$到 $\underbrace{\boldsymbol{C}^{2\times2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{C}^{2\times2}}_{n\text{个}}$的代数同构 f 满足:

$$f(e_i)=\underbrace{J_2\otimes\cdots\otimes J_2}_{i-1\text{个}}\otimes P\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,\quad 1\leqslant i\leqslant n;$$

$$f(e_{n+i})=\underbrace{J_2\otimes\cdots\otimes J_2}_{i-1\text{个}}\otimes Q\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

则

1) f 在 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$上的限制是 $so(2n+1,\boldsymbol{C})$的旋表示 σ;

2) f 在 $\mathrm{Cl}(V)_2$上的限制是 $so(2n,\boldsymbol{C})$的两个旋表示 σ_1,σ_2 的和 $\sigma_1+\sigma_2$.

证 由定理 7.2.5 知 $\mathrm{Cl}(V)_{12},\mathrm{Cl}(V)_2$ 分别同构于

$$so(2n+1,\boldsymbol{C}),\quad so(2n,\boldsymbol{C}).$$

又 f 为代数同构,故在 $\mathrm{Cl}(V)_{12},\mathrm{Cl}(V)_2$ 上的限制分别为 $so(2n+1,\boldsymbol{C}),so(2n,\boldsymbol{C})$的表示.

1) 设 $D=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由定理 2.8.5 知

$$so(2n+1,\boldsymbol{C})=g(2n+1,I_{2n+1},\boldsymbol{C})$$

有 Cartan 子代数

$$\left\{SY\begin{pmatrix}0&0&0\\0&D&0\\0&0&-D\end{pmatrix}Y\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{C}\right\}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\sqrt{-1}D\\0&\sqrt{-1}D&0\end{pmatrix}\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{C}\right\}.$$

再由定理 7.2.5 的证明知 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$到 $so(2n+1,\boldsymbol{C})$的同构 g,此时满足:

$$SY\mathrm{diag}(0,D,-D)Y=-\frac{\sqrt{-1}}{2}g\Big(\sum_i x_ie_{i+1}e_{n-i+1}\Big).$$

于是

$$2\sqrt{-1}fg(SY\mathrm{diag}(0,D,-D)Y)$$
$$=\sum_{i=1}^n x_i\underbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}_{i\text{个}}\otimes\begin{pmatrix}-\sqrt{-1}&0\\0&\sqrt{-1}\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,$$

$$fg(SY\mathrm{diag}(0,D,-D)Y)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}x_i\underbrace{I_2\otimes\cdots\otimes I_2}_{i\uparrow}\otimes\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2.$$

故 f 在 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$上的限制的权系为

$$\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_n)\right\},$$

且每个权的重数均为 1,故此表示为 σ.

2) 设 $D=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由定理 2.8.6 知 $so(2n,\boldsymbol{C})=g(2n,I_{2n},\boldsymbol{C})$有 Cartan 子代数

$$\left\{S_1Y_1\begin{pmatrix}D&0\\0&-D\end{pmatrix}Y_1\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{C}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}0&-\sqrt{-1}D\\\sqrt{-1}D&0\end{pmatrix}\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{C}\right\}.$$

经与 1)类似的讨论知 f 在 $\mathrm{Cl}(V)_2$ 上限制的权系为

$$\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_n)\right\}=\Lambda_{\sigma_1}\cup\Lambda_{\sigma_2}.$$

由于 $\Lambda_{\sigma_1}\cap\Lambda_{\sigma_2}=\varnothing$,故此表示为 $\sigma_1+\sigma_2$ 且每个权的重数均为 1. ▌

定理 7.3.2 设 V 为 $\boldsymbol{C}$ 上 $2n$ 维线性空间,$e_1,e_2,\cdots,e_{2n}$为基,作为 $\mathrm{Cl}(V)$中元素,满足

$$e_i^2=1\quad(1\leqslant i\leqslant 2n);$$
$$e_ie_j=-e_je_i\quad(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant 2n).$$

f 为 $\mathrm{Cl}(V)$到 $\boldsymbol{C}^{2^n\times 2^n}$的满足定理 7.3.1 中条件的代数同构. 则

$$\mathrm{tr}f(e_i)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant 2n;$$
$$\mathrm{tr}f(\sqrt{-1}e_i)f(\sqrt{-1}e_j)=-2^n\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant 2n;$$
$$\mathrm{tr}f(e_ie_j)f(e_ke_l)=-2^n\delta_{ik}\delta_{jl},\quad 1\leqslant i<j\leqslant 2n,1\leqslant k<l\leqslant 2n;$$
$$\mathrm{tr}f(e_i)f(e_je_k)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant 2n,1\leqslant j<k\leqslant 2n;$$
$$\mathrm{tr}(f(\sqrt{-1}e_i)f(\sqrt{-1}e_j))^2=-2^n,\quad i\neq j;$$
$$\mathrm{tr}(f(\sqrt{-1}e_i)f(\sqrt{-1}e_i))^2=2^n;$$

$\operatorname{tr}(f(\sqrt{-1}e_i)f(e_je_k))^2=2^n,\quad i\neq j, j=k, i\neq k;$

$\operatorname{tr}(f(\sqrt{-1}e_i)f(e_ie_k))^2=-2^n,\quad i<k;$

$\operatorname{tr}(f(\sqrt{-1}e_k)f(e_ie_k))^2=-2^n,\quad i<k;$

$\operatorname{tr}(f(e_ie_j)f(e_je_k))^2=-2^n,\quad i<j<k;$

$\operatorname{tr}(f(e_ie_j)f(e_ke_i))^2=-2^n,\quad k<i<j;$

$\operatorname{tr}(f(e_ie_j)f(e_ke_l))^2=2^n$, $i<j, k<l$, i,j,k,l 互不相等;

$\operatorname{tr}(f(e_ie_j)f(e_ie_j))^2=2^n,\quad i<j.$

证 由定理 7.3.1 知

$$\operatorname{tr}f(e_i)=\operatorname{tr}f(e_i)f(e_je_k)=0.$$

由于

$$e_ie_j=-e_je_i,\quad \forall i\neq j,$$

故

$$\operatorname{tr}f(e_i)f(e_j)=0,\quad i\neq j.\quad (\sqrt{-1}e_i)^2=-e_i^2=-1.$$

因此

$$\operatorname{tr}f(\sqrt{-1}e_i)^2=-2^n.$$

又

$$\begin{cases} e_ie_je_je_l=e_ie_l=-e_le_i, & l\neq i,\\ e_ie_je_ie_l=-e_je_l=e_le_j, & j\neq l,\\ e_ie_je_ke_i=e_je_k=-e_ke_j, & k\neq j,\\ e_ie_je_ie_j=-1, & \\ e_ie_je_ke_l=-e_le_ie_je_k, & i,j,k,l \text{ 两两不等}, \end{cases}$$

因而

$$\operatorname{tr}(f(e_ie_j)f(e_ke_l))=-2^n\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

至此,已将定理中所叙述的公式中不包含平方的部分证完.注意到若 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 两两不等,

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})^2=(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}1,$$

则容易验证上述公式中包含平方的部分. ▌

下节我们将用 $\mathrm{Cl}(V)_{12}$ 与 $\mathrm{Cl}(V)_2$ 来实现构造例外单李代数 F_4 与 E_8.

§4 李代数 F_4 与 E_8

本节将利用由 Clifford 代数得到的 $so(2n+1,\boldsymbol{C})$ 与 $so(2n,\boldsymbol{C})$ 的表示来构造例外单李代数 F_4 与 E_8.

引理 7.4.1 设 $\mathfrak{g}$ 为 F 上的李代数，V 是 $\mathfrak{g}$-模. 若 φ 是 $V\times V$ 到 $\mathfrak{g}$ 的映射，并满足下列条件：

1) φ 是反对称双线性的（或 $\varphi(X,X)=0$, $\forall X\in V$）；

2) $\varphi(X,Y)Z+\varphi(Y,Z)X+\varphi(Z,X)Y=0$, $\forall X,Y,Z\in V$； (1)

3) $[E,\varphi(X,Y)]=\varphi(EX,Y)+\varphi(X,EY)$, $\forall E\in\mathfrak{g};X,Y\in V$, (2)

则线性空间 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}+V$ 对下面的括积

$$[E_1+X_1,E_2+X_2]=[E_1,E_2]+E_1\cdot X_2-E_2\cdot X_1+\varphi(X_1,X_2)$$
$$(\forall E_1,E_2\in\mathfrak{g},X_1,X_2\in V)$$

构成 F 上的李代数. $\mathfrak{g}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的子代数.

证 显然，上述括积是双线性的，且

$$[E+X,E+X]=0,\quad \forall E\in\mathfrak{g},X\in V,$$

因而，我们只要验证 Jacobi 等式. 注意到

$$\begin{aligned}&[E_1+X_1,[E_2+X_2,E_3+X_3]]\\&\quad=[E_1,[E_2,E_3]]+E_1E_2X_3-E_1E_3X_2-[E_2,E_3]X_1\\&\qquad-\varphi(X_2,X_3)X_1+\varphi(X_1,E_2X_3-E_3X_1)+[E_1,\varphi(X_2,X_3)].\end{aligned}$$

将(1,2,3)依次换为(3,1,2),(2,3,1)又得两式. 然后将三式相加，利用 V 为 $\mathfrak{g}$-模及(1),(2)两式即可证明 Jacobi 等式成立. ▌

由于 φ 的双线性，故要验证(1),(2)我们只要取 X,Y,Z 及 E 为基元素即可.

引理 7.4.2 设 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 为复李代数 $\mathfrak{g}$ 的基，且 $[E_i,E_j]=\sum_k C_{ij}^kE_k$. 又 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 $\mathfrak{g}$-模 V 的基，且

$$E_iX_\alpha=\sum_\beta d_{\alpha\beta}^iX_\beta,\quad 1\leqslant i\leqslant m;\ 1\leqslant\alpha\leqslant n.$$

记

$$D^i=(d^i_{\alpha\beta}),\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

如果 $D^i(i=1,2,\cdots,m)$满足：

1）$D^i\in\boldsymbol{R}^{n\times n},(D^i)'=-D^i$；

2）$\operatorname{tr}(D^iD^k)=-n\cdot\delta_{ik}$；

3）$\operatorname{tr}\left(\sum\limits_{i,k}(D^iD^k)^2\right)=\frac{1}{2}mn^2$，

则 $V\times V$ 到 $\mathfrak{g}$ 中映射：

$$\varphi\left(\sum_\alpha\lambda_\alpha X_\alpha,\sum_\beta\mu_\beta X_\beta\right)=\sum_{\alpha,\beta,i}\lambda_\alpha\mu_\beta d^i_{\alpha\beta}E_i$$

满足引理 7.4.1 中的三个条件.

证 由 D^i 的反对称性，知

$$\varphi(X_\alpha,X_\beta)=-\varphi(X_\beta,X_\alpha),$$

即 φ满足条件 1).

又

$$\begin{aligned}&[E_i,\varphi(X_\alpha,X_\beta)]-\varphi(E_iX_\alpha,X_\beta)-\varphi(X_\alpha,E_iX_\beta)\\&=\sum_{j,k}d^j_{\alpha\beta}C^k_{ij}E_k-\sum_{\gamma,k}d^i_{\alpha\gamma}d^k_{\gamma\beta}E_k-\sum_{\gamma,k}d^i_{\beta\gamma}d^k_{\alpha\gamma}E_k\\&=\sum_k\left(\sum_j d^j_{\alpha\beta}C^k_{ij}-\sum_\gamma d^i_{\alpha\gamma}d^k_{\gamma\beta}-\sum_\gamma d^i_{\beta\gamma}d^k_{\alpha\gamma}\right)E_k.\end{aligned}$$

另一方面，由

$$[E_i,E_k]X_\alpha-E_i(E_kX_\alpha)+E_k(E_iX_\alpha)=0$$

知

$$\sum_j C^j_{ik}d^j_{\alpha\beta}-\sum_\gamma d^i_{\gamma\beta}d^k_{\alpha\gamma}+\sum_\gamma d^k_{\gamma\beta}d^i_{\alpha\gamma}=0,$$

故

$$\begin{aligned}&[E_i,\varphi(X_\alpha,X_\beta)]-\varphi(E_iX_\alpha,X_\beta)-\varphi(X_\alpha,E_iX_\beta)\\&=\sum_k\sum_j d^j_{\alpha\beta}(C^k_{ij}+C^j_{ik})E_k.\end{aligned}$$

但是，由 $\operatorname{tr}D^iD^k=-n\delta_{ik}$知

$$0=\operatorname{tr}[D^i,D^jD^k]=\operatorname{tr}D^j[D^i,D^k]+\operatorname{tr}[D^i,D^j]D^k$$

$$= \mathrm{tr}\Big(\sum_l C_{ik}^l D^j D^l\Big) + \mathrm{tr}\Big(\sum_l C_{ij}^l D^l D^k\Big)$$
$$= -n(C_{ik}^j + C_{ij}^k),$$

即

$$C_{ik}^j = -C_{ij}^k.$$

因此知 φ 满足条件 3).

又对于 $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$,我们有

$$\varphi(X_\alpha, X_\beta)X_\gamma + \varphi(X_\beta, X_\gamma)X_\alpha + \varphi(X_\gamma, X_\alpha)X_\beta$$
$$= \sum_{i,\delta}(d_{\alpha\beta}^i d_{\gamma\delta}^i + d_{\beta\gamma}^i d_{\alpha\delta}^i + d_{\gamma\alpha}^i d_{\beta\delta}^i)X_\delta.$$

记

$$P(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \sum_i (d_{\alpha\beta}^i d_{\gamma\delta}^i + d_{\beta\gamma}^i d_{\alpha\delta}^i + d_{\gamma\alpha}^i d_{\beta\delta}^i).$$

由 D^i 的反对称性,知

$$P(\pi(\alpha),\pi(\beta),\pi(\gamma),\pi(\delta)) = \mathrm{sgn}\pi \cdot P(\alpha,\beta,\gamma,\delta),$$
$$\forall \pi \in S_{\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}}.$$

π 为奇、偶置换时,$\mathrm{sgn}\pi$ 分别为 $-1, 1$.

又由于

$$\mathrm{tr}D^i D^k = \sum_{\alpha,\beta} d_{\alpha\beta}^i\, d_{\beta\alpha}^k,$$
$$\mathrm{tr}(D^i D^k)^2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} d_{\alpha\beta}^i\, d_{\beta\gamma}^k\, d_{\gamma\delta}^i\, d_{\delta\alpha}^k,$$

故

$$\sum_{i,k}(\mathrm{tr}D_i D_k)^2 - 2\sum_{i,k}\mathrm{tr}(D^i D^k)^2$$
$$= \sum_{i,k}\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} d_{\alpha\beta}^i\, d_{\gamma\delta}^i (d_{\beta\alpha}^k\, d_{\delta\gamma}^k - 2d_{\beta\gamma}^k\, d_{\delta\alpha}^k)$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} P(\alpha,\beta,\gamma,\delta)(P(\beta,\alpha,\delta,\gamma) - 2P(\beta,\gamma,\delta,\alpha))$$
$$= 3\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} P(\alpha,\beta,\gamma,\delta)^2.$$

但是

$$\sum_{i,k}(\mathrm{tr}D^i D^k)^2 - 2\sum_{i,k}\mathrm{tr}(D^i D^k)^2$$

$$= \sum_{i,k}(-n\delta_{ik})^2 - 2\mathrm{tr}\sum_{i,k}(D^iD^k)^2$$
$$= mn^2 - mn^2 = 0.$$

由于 $d^i_{\alpha\beta}\in \boldsymbol{R}$ $(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant \alpha,\beta\leqslant n)$,故 $P(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in \boldsymbol{R}$,于是

$$P(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=0.$$

故 φ 也满足条件 2). ▌

定理 7.4.3 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上单李代数,V 是不同构于 $\mathfrak{g}$-模 $\mathfrak{g}$ 的不可约 $\mathfrak{g}$-模. $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 为 $\mathfrak{g}$ 的基;$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 V 的基. 又

$$E_iX_\alpha = \sum_\beta d^i_{\alpha\beta}X_\beta,\quad 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant \alpha\leqslant n.$$

记 $D^i=(d^i_{\alpha\beta})$. 如果 D^i 满足下列条件:

1) D^i 是反对称实矩阵,

2) $\mathrm{tr}D^iD^k=-n\delta_{ik}$,

3) $\mathrm{tr}\left(\sum_{i,k}(D^iD^k)^2\right)=\frac{1}{2}mn^2$,

那么线性空间 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dotplus V$ 对括积

$$[E+X,F+Y]=[E,F]+EY-FX+\varphi(X,Y)$$
$$\forall E,F\in\mathfrak{g},X,Y\in V$$

(其中 $\varphi(X,Y)$ 由 $\varphi(X_\alpha,X_\beta) = \sum_i d^i_{\alpha\beta}E_i$ 确定)成为复单李代数.

证 由引理 7.4.2 知 $\varphi(X,Y)$ 满足引理 7.4.1 的三个条件. 故由引理 7.4.1 知 $\mathfrak{g}_1$ 按上述括积确为复李代数,且由 $D^i\neq 0$,知 V 是非平凡 $\mathfrak{g}$-模.

显然,对于 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上的如下作用:

$E\cdot(F+X)=[E,F+X]=[E,F]+E\cdot X$ $(\forall E,F\in\mathfrak{g},X\in V)$,

$\mathfrak{g}_1$ 为 $\mathfrak{g}$-模,且 $\mathfrak{g},V$ 均为 $\mathfrak{g}_1$ 的不可约子模,而且互不同构. 故 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dotplus V$ 是不可约子模的直和分解. 设 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的理想,则$[\mathfrak{g},\mathfrak{n}]\subseteq\mathfrak{n}$. 因而 $\mathfrak{n}$ 为 $\mathfrak{g}$-模 $\mathfrak{g}_1$ 的子模. 于是只有 $\mathfrak{n}=\mathfrak{g},\mathfrak{n}=V$ 与 $\mathfrak{n}=\mathfrak{g}+V,\mathfrak{n}=\{0\}$. 注意到,$\mathfrak{g}$ 与 V 均不是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想. 故 $\mathfrak{n}=\mathfrak{g}_1$ 或 $\mathfrak{n}=\{0\}$. 因而 $\mathfrak{g}_1$ 是单李代数. ▌

我们利用紧单李代数的表示论的一些结果(参见本章 § 5),可

以将定理 7.4.3 中的条件 1)换成更容易判断的条件.

现假定 $\mathfrak{g}$ 为复单李代数,$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的素根系,(ρ,V) 为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示权系,最高权分别为 Λ,λ. 又 $h=\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$ 满足 $(h,\alpha_i)=2,1\leqslant i\leqslant l$. (x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型,$T(\rho)=(\lambda,h)$.

定理 7.4.4 设 (ρ,V) 为复单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 如果 (ρ,V) 满足下列条件:

1) $\Lambda=-\Lambda,T(\rho)$ 为偶数;

2) 有 $\mathfrak{g}$ 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使得

$$\mathrm{tr}\rho(x_i)\rho(x_k)=-\mathrm{dim}V\cdot\delta_{ik};$$

3) $\mathrm{tr}\sum_{i,k}(\rho(x_i)\rho(x_k))^2=\frac{1}{2}\mathrm{dim}\mathfrak{g}\cdot(\mathrm{dim}V)^2$,

则在 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dotplus V$ 中可定义括积使得 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数.

证 由于 $\Lambda=-\Lambda$,故 (ρ,V) 与其对偶表示同构. 因而,由定理 7.5.3 存在 V 上的非退化不变双线性函数 $f(u,v)$. 由于 (ρ,V) 不可约,且 $T(\rho)$ 为偶数,故 $f(u,v)$ 是对称的(引理 7.5.5). 再由定理 7.5.6 知,在 V 中有实线性空间 V_0 使得 $V=V_0\dotplus\sqrt{-1}V_0$. (ρ,V_0) 为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式 $\mathfrak{g}_0$ 的表示,且 $f(u,v)$ 在 V_0 上的限制是正定的. 故在 V_0 中有基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 使得 $f(v_i,v_j)=\delta_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n$. 由于

$$f(\rho(x)u,v)+f(u,\rho(x)v)=0,\quad \forall x\in\mathfrak{g}_0,$$

故 $\rho(x)$ 在基 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 下的矩阵为实反对称矩阵.

显然

$$\beta_\rho(x,y)=\mathrm{tr}\rho(x)\rho(y),\quad x,y\in\mathfrak{g}$$

为 $\mathfrak{g}$ 上对称双线性函数. 故由定理 6.1.1 知

$$\beta_\rho(x,y)=c(x,y),$$

其中 (x,y) 为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型,$c>0$,(x,y) 在 $\mathfrak{g}_0$ 上的限制是负定的. 于是若有 $\mathfrak{g}$ 的基 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 使得

$$\mathrm{tr}(\rho(x_i)\rho(x_k))=-n\delta_{ik},\quad 1\leqslant i,k\leqslant m,$$

则有 $\mathfrak{g}$ 的基 $y_1,y_2,\cdots,y_m\in\mathfrak{g}_0$,使得

$$(x_i, x_k) = (y_i, y_k), \quad 1 \leqslant i, k \leqslant m.$$

因而

$$\operatorname{tr}(\rho(y_i)\rho(y_k)) = -n\delta_{ik}, \quad 1 \leqslant i, k \leqslant m.$$

而且
$$y_i = \sum_{j=1}^{m} t_{ji} x_j,$$

其中(t_{ji})满足

$$\sum_{j=1}^{m} t_{ji} t_{jk} = \delta_{ik},$$

故
$$\sum_{j=1}^{m} t_{ij} t_{kj} = \delta_{ik}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr} \sum_{i,k} (\rho(y_i)\rho(y_k))^2 \\
&\quad = \operatorname{tr} \sum_{i,k} \sum_{s,s_1,r,r_1} t_{si} t_{rk} t_{s_1 i} t_{r_1 k} \rho(x_s)\rho(x_r)\rho(x_{s_1})\rho(x_{r_1}) \\
&\quad = \operatorname{tr} \sum_{s,r} (\rho(x_s)\rho(x_r))^2 = \frac{1}{2} m n^2.
\end{aligned}$$

因而 $\mathfrak{g}$ 的基 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, V 的基 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 满足定理 7.4.3 的三个条件. 故 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \dotplus V$ 为单李代数. ▌

现在我们可以实现 F_4 与 E_8 了.

定理 7.4.5 设 $\mathfrak{g} = so(9, \boldsymbol{C})$, (ρ, V)为其旋表示,则在线性空间 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \dotplus V$ 中有括积使得 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数,此代数恰为 F_4.

证 $so(9, \boldsymbol{C})$的素根系为$\{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_4, \lambda_4\}$. 旋表示$(\rho, V)$的权系为

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{2}(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \lambda_3 \pm \lambda_4) \right\} = -\Lambda.$$

故(ρ^*, V^*)与(ρ, V)等价.

又(ρ, V)的最高权为$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$. 由$(h, \alpha_i) = 2$,立即可得$(h, \lambda_i) = 10 - 2i$. 因而,有 $T(\rho) = 10$,故定理 7.4.4 中条件 1)满足.

以 8 维线性空间 V_8 的 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V_8)$ 中的 $\mathrm{Cl}(V_8)_{12}$ 来实现 $so(9,\boldsymbol{C})$ 的旋表示. $\mathrm{Cl}(V_8)_{12}$ 中有基

$$\{\sqrt{-1}e_i, e_je_k \mid 1\leqslant i\leqslant 8, 1\leqslant j<k\leqslant 8\}.$$

由定理 7.3.2 容易算出

$$\{\rho(\sqrt{-1}e_i), \rho(e_je_k) \mid 1\leqslant i\leqslant 8, 1\leqslant j<k\leqslant 8\}$$

满足定理 7.4.4 中的条件 2),3).

由于单李代数 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dot{+}V$ 中 V 为 $\mathfrak{g}$-模,且任何权均为非零权. 故 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数也是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数,即 $r(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}=4$.

又 $\dim\mathfrak{g}_1=\dim\mathfrak{g}+\dim V=52$. 而 $\dim A_4=24, \dim B_4=\dim C_4=36, \dim D_4=28$. 因而 $\mathfrak{g}_1$ 只可能是 F_4. ▌

定理 7.4.6 设 $\mathfrak{g}=so(16,\boldsymbol{C})$, (ρ,V) 为其旋表示 σ_2(见定义 7.3.2). 则在线性空间 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dot{+}V$ 中有括积使得 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数,此代数恰为 E_8.

证 $so(16,\boldsymbol{C})$ 的素根系为 $\{\lambda_i-\lambda_{i+1}, 1\leqslant i\leqslant 7; \lambda_7+\lambda_8\}$. 旋表示 σ_1 的权系为

$$\Lambda=\left\{\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_8) \mid \text{奇数个负号}\right\}=-\Lambda,$$

故 (ρ^*,V^*) 与 (ρ,V) 同构. 又若 $(h,\alpha_i)=2$, 易得 $(h,\lambda_i)=16-2i$, $1\leqslant i\leqslant 8$. 故 $T(\rho)=28$ 为偶数. 因而定理 7.4.4 的条件 1)满足.

由于 $\dim(V\dot{+}V^*)=2^8$. 而 $\dim V=\dim V^*$, 故 $\dim V=2^7$.

以 16 维线性空间 V_{16} 的 Clifford 代数 $\mathrm{Cl}(V_{16})$ 中的 $\mathrm{Cl}(V_{16})_2$ 来实现 $so(16,\boldsymbol{C})$ 的旋表示 $\sigma_1+\sigma_2$, 即 $V+V^*$. 注意到定理 7.3.2 中的关系,限制在 V 上有

$$\mathrm{tr}(f(e_ie_j)f(e_ke_l))_V=-2^7\delta_{ik}\delta_{jl},$$

$$\mathrm{tr}(f(e_ie_j)f(e_ke_l))_V^2=\pm 2^7,$$

其中正负号的选取仍按定理 7.3.2 中的条件选取. 由此不难算出 $\{f(e_ie_j)|_V \mid 1\leqslant i<j\leqslant 16\}$ 满足定理 7.4.4 中条件 2),3). 于是 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}\dot{+}V$ 中有括积使得 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数. 由于 $\mathfrak{g}$-模 V 中无零权,故 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数也是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数. 因而, $r(\mathfrak{g}_1)=r(\mathfrak{g})=8$, 而

且

$$\dim\mathfrak{g}_1=\dim\mathfrak{g}+\dim V=248.$$

但

$$\dim A_8=80,\ \dim B_8=\dim C_8=136,\ \dim D_8=120.$$

故 $\mathfrak{g}_1$ 为单李代数 E_8. ▌

从定理 7.4.5 与定理 7.4.6 我们还可以知道 F_4 与 E_8 的根系分别为

$$\pm(\lambda_i-\lambda_j),\ \pm\lambda_k,\ \frac{1}{2}(\lambda_1\pm\lambda_2\pm\lambda_3\pm\lambda_4);$$

$$\pm(\lambda_i-\lambda_j),\ \pm(\lambda_i+\lambda_j),\ \frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\cdots\pm\lambda_8),\text{奇数个“}-\text{”}.$$

关于 E_6,E_7 的实现,它们均可作为 E_8 中的子代数来实现.

定理 7.4.5 与定理 7.4.6 的证明,也可直接寻找满足定理 7.4.3 中条件 1),2),3)的基.详细的论述及计算可参考万哲先著《李代数》一书.

另外,我们要指出这章中用到的单李代数及其表示都是具体构造出来的,事先不必知道它们的存在性.因而我们并不要求事先知道例外单李代数的存在,却具体直接构造出来这也是存在性的一种证明.

§5 紧单李代数的表示

紧单李代数的表示理论的内容是非常丰富的.我们在这里只介绍在上一节需要用到的结果.部分结果的证明需要用到李群的理论,我们就只叙述结果.

定理 7.5.1 设(ρ,V)是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示.又 $\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式,则存在 V 的正定 Hermite 型(u,v),使得

$$(\rho(x)u,v)+(u,\rho(x)v)=0,\quad \forall x\in\mathfrak{g}_0.$$

这个定理的证明要用到李群的结果,我们仅叙述大致的证明

步骤.

设 G_0 为 $\mathfrak{g}_0$ 对应的连通且单连通李群. 于是 $x_0\in\mathfrak{g}_0$, $\exp x_0\in G_0$, 且 G_0 由 $\{\exp x_0\mid x_0\in\mathfrak{g}_0\}$ 生成. 故由 $\rho_1(\exp x_0)=\exp\rho(x_0)$ 使得 V 为 G_0 的表示空间, 且 $(\mathrm{d}\rho_1,V)=(\rho,V)$. 设 $(u,v)_1$ 为 V 上任一正定 Hermite 型, 则

$$(u,v)=\int_{G_0}(\rho_1(g)u,\rho_1(g)v)_1\mathrm{d}g$$

就是所要求的正定 Hermite 型.

与定理 7.5.1 类似的有下面定理.

定理 7.5.2 设 (ρ,V) 是紧致李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示, 则 V 上有正定对称双线性函数 (u,v) 使得

$$(\rho(x)u,v)+(u,\rho(x)v)=0,\quad \forall u,v\in V, x\in\mathfrak{g}.$$

证明的步骤与定理 7.5.1 是一样, 只是紧致李代数是实李代数, 故 V 是实线性空间. 将前面定理证明中的 $(u,v)_1$ 取为任一正定对称双线性函数即可.

定理 7.5.3 设 (ρ,V) 是复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示. 又设 (ρ^*,V^*) 为 (ρ,V) 的对偶表示. 则 (ρ^*,V^*) 与 (ρ,V) 同构的充分必要条件是存在 V 的非退化双线性函数 $f(u,v)$ 使得

$$f(\rho(x)u,v)+f(u,\rho(x)v)=0,\quad \forall u,v\in V, x\in\mathfrak{g}.$$

证 必要性 因为 (ρ,V) 与 (ρ^*,V^*) 同构, 故存在 V 到 V^* 的可逆线性映射 $\mathscr{A}$, 使得

$$\rho^*(x)\mathscr{A}u=\mathscr{A}\rho(x)u,\quad \forall x\in\mathfrak{g}, u\in V.$$

定义 $V\times V$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射 f 为

$$f(u,v)=(\mathscr{A}u)(v),\quad \forall u,v\in V.$$

显然, $f(u,v)$ 是双线性的. 又

$$\begin{aligned}
&f(\rho(x)u,v)+f(u,\rho(x)v)\\
&=(\mathscr{A}\rho(x)u)(v)+(\mathscr{A}u)(\rho(x)v)\\
&=(\rho^*(x)\mathscr{A}u)(v)+(\mathscr{A}u)(\rho(x)v)\\
&=-(\mathscr{A}u)(\rho(x)v)+(\mathscr{A}u)(\rho(x)v)=0.
\end{aligned}$$

若 $u\in V$,使得 $f(u,v)=0,\ \forall v\in V$,即$(\mathscr{A}u)(v)=0,\ \forall v\in V$. 故 $\mathscr{A}u=0$. 由 $\mathscr{A}$ 可逆,知 $u=0$.

又若 $v\in V$,使得 $f(u,v)=0,\ \forall u\in V$,即有$(\mathscr{A}u)(v)=0,\ \forall u\in V$. 因为 $\mathscr{A}V=V^*$,故 $v=0$,即 $f(u,v)$是非退化的. 这样必要性证完.

充分性 由于 $f(u,v)$是双线性的,故对任意固定的 u,由$(\mathscr{A}u)(v)=f(u,v)$所确定的 $\mathscr{A}u\in V^*$是显然的,V 到 V^* 的映射 $\mathscr{A}$ 是线性的. 由 $f(u,v)$是非退化的,故 $\mathscr{A}$ 是一一的. 又由于 $\dim V=\dim V^*$ 知 $\mathscr{A}$ 是可逆的,又由

$$f(\rho(x)u,v)=f(u,-\rho(x)v)$$

知

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}\rho(x)u)(v)&=(\mathscr{A}u)(-\rho(x)v)\\&=(\rho^*(x)\mathscr{A}u)(v),\quad \forall u,v\in V,\end{aligned}$$

即有

$$\mathscr{A}\rho(x)=\rho^*(x)\mathscr{A},\quad \forall x\in\mathfrak{g}.$$

因而(ρ,V)与(ρ^*,V^*)同构. ▌

定义 7.5.1 设(ρ,V)为复李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示. 如果 V 的双线性函数 $f(u,v)$满足

$$f(\rho(x)u,v)+f(u,\rho(x)v)=0,\quad \forall u,v\in V,x\in\mathfrak{g},$$

则称 $f(x,y)$为 **$\mathfrak{g}$-不变双线性函数**,简称**不变双线性函数**.

引理 7.5.4 设(ρ,V)为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 若 $f_1(u,v),f_2(u,v)$都是 V 的不变双线性函数,则 $f_i\neq 0$ 时,f_i 是非退化的,且有 $c\in\boldsymbol{C}$,使得 $f_1=cf_2$,f_i 是对称或反对称的.

证 设 $f_i\neq 0$. 则

$$\begin{aligned}V_1&=\{v_1\in V\mid f_i(v_1,v)=0,\ \forall v\in V\},\\V_1'&=\{v_1'\in V\mid f_i(v,v_1')=0,\ \forall v\in V\}\end{aligned}$$

都是 V 的真子空间,而且对 $\forall x\in\mathfrak{g},v\in V,v_1\in V_1,v_1'\in V_1'$ 有

$$f_i(\rho(x)v_1,v)=-f_i(v_1,\rho(x)v)=0,$$

及

$$f_i(v,\rho(x)v_1')=-f_i(\rho(x)v,v_1')=0.$$

因而V_1,V_1'都是V的不变子空间.由V不可约,知$V_1=V_1'=\{0\}$,即f_i是非退化的.

由定理7.5.3知,f_1,f_2非退化,则有V到V^*的线性同构

$$(\mathscr{A}_1u)(v)=f_1(u,v),\quad (\mathscr{A}_2u)(v)=f_2(u,v)$$

满足

$$\rho^*(x)\mathscr{A}_i=\mathscr{A}_i\rho(x),\quad i=1,2,\ \forall x\in\mathfrak{g}.$$

于是$\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}_2$为$V$的可逆线性变换,且

$$\rho(x)\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}_2=\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}_2\rho(x),\quad \forall x\in\mathfrak{g}.$$

由(ρ,V)不可约,故由Schur引理知有$c\in\boldsymbol{C}$使得

$$\mathscr{A}_1^{-1}\mathscr{A}_2=c\ \mathrm{id}_V,$$

故

$$f_2(u,v)=cf_1(u,v),\quad \forall u,v\in V.$$

显然,$f_i'(v,u)=f_i(u,v)$也是不变双线性函数,故有$c\in\boldsymbol{C},c\neq 0$使得

$$\begin{aligned}f_i'(v,u)&=cf_i(v,u)=cf_i'(u,v)\\&=c^2f_i(u,v)=c^2f_i'(v,u).\end{aligned}$$

故$c^2=1$,即$c=\pm1$.故f_i是对称或反对称的. ▌

引理7.5.5 设$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为复半单李代数$\mathfrak{g}$的素根系,$h=\sum_{i=1}^{n}m_i\alpha_i$满足$(h,\alpha_i)=2,1\leqslant i\leqslant n$.又设$(\rho,V)$是$\mathfrak{g}$的不可约表示并同构于$(\rho^*,V^*)$,$\lambda$为$(\rho,V)$的最高权.则$T(\rho)=(\lambda,h)$为偶数时(奇数时),$V$的不变双线性函数$f(x,y)$是对称的(反对称的).

证 设$\{e_\alpha|\alpha\in\Delta\}$为$\mathfrak{g}$的Weyl基.令

$$e_+=\sum_{i=1}^{n}m_ie_{\alpha_i},\quad e_-=\sum_{i=1}^{n}e_{-\alpha_i}.$$

则

$$[h,e_+] = \sum_{i=1}^{n} 2m_i e_{\alpha_i} = 2e_+;$$

$$[h,e_-] = \sum_{i=1}^{n} -2e_{-\alpha_i} = -2e_-;$$

$$[e_+,e_-] = \sum_{i=1}^{n} m_i[e_{\alpha_i},e_{-\alpha_i}] = \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i = h.$$

于是 $\mathfrak{g}_1=L(h,e_+,e_-)$为 $\mathfrak{g}$ 的 3 维单子代数，故(ρ,V)限制在 $\mathfrak{g}_1$ 上为 $\mathfrak{g}_1$ 的表示，$f(x,y)$也是 $\mathfrak{g}_1$ 的不变双线性函数.

设 v_λ 为(ρ,V)的最高权向量.记

$$\xi_i=(\rho(e_-))^i v_\lambda, \quad i=0,1,\cdots,$$

$$V_0=L((\rho(e_-))^i v_\lambda, \quad i=0,1,\cdots.$$

因而 V_0 是 $\mathfrak{g}_1$ 的不可约不变子空间.由于

$$\rho(h)\xi_i=(T(\rho)-2i)\xi_i,$$

故

$$\rho(h)\xi_{T(\rho)}=-T(\rho)\xi_{T(\rho)}.$$

于是

$$V_0=L(v_\lambda,\rho(e_-)v_\lambda,\cdots,(\rho(e_-))^{T(\rho)}v_\lambda).$$

令

$$V_1=\{v\in V\mid f(V_0,v)=0\}.$$

于是由 $f(x,y)$非退化知

$$V=V_0\dotplus V_1,$$

因而

$$f(\xi_i,V_1)=0.$$

又

$$\begin{aligned}0&=f(\rho(h)\xi_i,\xi_j)+f(\xi_i,\rho(h)\xi_j)\\&=2(T(\rho)-i-j)f(\xi_i,\xi_j),\end{aligned}$$

因而，当 $i+j\neq T(\rho)$时，$f(\xi_i,\xi_j)=0$. 于是由 f 非退化知

$$f(\xi_i,\xi_{T(\rho)-i})\neq 0, \quad i=0,1,\cdots,T(\rho).$$

特别

$$f(\xi_0,\xi_{T(\rho)})=f(\xi_0,\rho(e_-)\xi_{T(\rho)-1})$$
$$=-f(\rho(e_-)\xi_0,\xi_{T(\rho)-1})$$
$$=(-1)^{T(\rho)}f(\xi_{T(\rho)},\xi_0).$$

由此知 $T(\rho)$ 为偶数(奇数)时,$f(x,y)$ 是对称的(反对称的). ▌

定理 7.5.6 设 $\mathfrak{g}_0$ 为复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的紧致实形式,(ρ,V) 为 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示,$f(x,y)$ 为 V 的非零对称不变双线性函数. 则 V 中存在实线性空间 V_0 使得

$$V=V_0\dot{+}\sqrt{-1}V_0,$$

且 (ρ,V_0) 为 $\mathfrak{g}_0$ 的表示.

证 由定理 7.5.1 知,V 上存在正定 Hermite 型 (u,v) 使得

$$(\rho(x)u,v)+(u,\rho(x)v)=0,\quad \forall x\in\mathfrak{g}_0.$$

对固定的 v, (u,v), $f(u,v)$ 均为 V 上线性函数. 由于 (u,v), $f(u,v)$ 都是非退化的,故有唯一的 $v'\in V$ 使得

$$f(u,v)=(u,v'),\quad \forall u\in V.$$

因而,我们得到 V 到 V 的映射 σ': $\sigma'(v)=v'$. 由

$$(u,\sigma'(v_1+v_2))=f(u,v_1+v_2)=f(u,v_1)+f(u,v_2)$$
$$=(u,\sigma'(v_1)+\sigma'(v_2)),$$
$$(u,\sigma'(\alpha v))=f(u,\alpha v)=\alpha f(u,v)$$
$$=\alpha(u,\sigma'(v))=(u,\bar{\alpha}\sigma'(v)),$$

知

$$\sigma'(v_1+v_2)=\sigma'(v_1)+\sigma'(v_2),$$
$$\sigma'(\alpha v)=\bar{\alpha}\sigma'(v).$$

而且 $\forall v'\in V$,有唯一的 $v\in V$ 使得

$$f(u,v)=(u,v').$$

故 σ' 是 V 到 V' 的满映射,$(\sigma')^2$ 为 V 的可逆线性变换,而且

$$(u,\sigma'(\rho(x)v))=f(u,\rho(x)v)=-f(\rho(x)u,v)$$
$$=-(\rho(x)u,\sigma'(v))=(u,\rho(x)\sigma'(v)),\quad \forall x\in\mathfrak{g}_0.$$

故

$$\sigma'\rho(x)=\rho(x)\sigma', \quad \forall x\in\mathfrak{g}_0.$$

于是

$$\sigma'^2\rho(x)=\rho(x)\sigma'^2, \quad \forall x\in\mathfrak{g}.$$

因而,由 Schur 引理有

$$\sigma'^2=c\ \mathrm{id}_V, \quad c\neq 0,$$

故 $\sigma'=c(\sigma')^{-1}$. 又

$$\begin{aligned}(u,v)&=(u,\sigma'(\sigma')^{-1}v)=f(u,(\sigma')^{-1}v)\\&=f\left(u,\frac{1}{c}\sigma'(v)\right)=\frac{1}{c}f(\sigma'(v),u)\\&=\frac{1}{c}(\sigma'(v),\sigma'(u)),\end{aligned}$$

取 $v=u$,则知 $c>0$. 令 $c'=c^{-1/2}$, $\sigma=c'\sigma'$,则

$$\begin{aligned}&\sigma(u+v)=\sigma(u)+\sigma(v),\\&\sigma(\alpha u)=\bar{\alpha}\sigma(u),\\&\sigma^2=\mathrm{id}_V,\\&\sigma\rho(x)=\rho(x)\sigma, \quad \forall x\in\mathfrak{g}_0.\end{aligned}$$

令

$$V_0=\{v\in V\mid\sigma(v)=v\}.$$

显然,V_0 对于 V 的加法,V 与实数的乘法构成实线性空间,而

$$\sqrt{-1}V_0=\{v\in V\mid\sigma(v)=-v\}.$$

易证

$$V=V_0\dotplus\sqrt{-1}V_0,$$

$$\rho(x)V_0\subseteq V_0, \quad \forall x\in\mathfrak{g}_0.$$

故 (ρ,V_0) 是 $\mathfrak{g}_0$ 的表示. ▌

推论 1 若 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 为实线性空间 V_0 的基,则 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 也是复线性空间 V 的基,于是 $\dim V_0=\dim V$.

自然,我们称 V_0 为 V 的**实形式**.

推论 2 $f(u,v)$ 在 V_0 上的限制是 V_0 的正定对称双线性函数.

事实上,我们只要证明 $f(u,v)\in \mathbf{R}$ $(\forall u,v\in V_0)$及 $f(u,u)>0$ $(\forall u\in V_0, u\neq 0)$. 由于

$$(u,v)=(u,\sigma(v))=f(u,v)=f(v,u)$$
$$=(v,\sigma(u))=(v,u)=\overline{(u,v)},$$

故 $f(u,v)\in \mathbf{R}$. 另外,容易得出

$$f(u,u)=(u,\sigma(u))=(u,u)>0. \quad \blacksquare$$

此推论似乎说,我们不必依赖紧李群的结果而得到定理 7.5.2 的结果. 但是(u,v)的存在性,在我们的叙述中仍然用到了紧李群的结果.

关于紧致李群及其李代数的表示论的结果,读者也可参阅严志达,许以超所著《Lie 群及其 Lie 代数》一书.

参 考 书 目

[1] Bourbaki, N., *Eléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie*, Actualités Sci. Ind. Hermann, 1960, 1968.

[2] Humphreys, J. E., *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Berlin Heidelberg New York, 1972.

[3] Jacobson, N., *Lie algebras*, Wiley (*Interscience*), New York, 1962.

[4] Kac, V., *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[5] 项武义、侯自新、孟道骥,《李群讲义》,北京大学出版社,北京,1992.

[6] 万哲先,《李代数》,科学出版社,北京,1964.

[7] 严志达,《半单纯李群李代数表示论》,上海科学技术出版社,上海,1963.

[8] 严志达、许以超,《Lie 群及其 Lie 代数》,高等教育出版社,北京,1985.

名 词 索 引

符 号 说 明

A_l	典型李代数
ad	伴随表示
$\mathrm{ad}\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}$ 的内导子代数
$\mathrm{Aut}\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}$ 的自同构群
B_l	典型李代数
$C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$	$\mathfrak{m}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的中心化子
C_{ij}^k	结构常数
C_l	典型李代数
$C(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$ 的中心
ch	特征
$Cl(V)$	V 的 Clifford 代数
$\mathrm{col}_i A$	矩阵 A 的第 i 列
D_l	典型李代数
$\mathrm{Der}\mathfrak{g}, \delta(\mathfrak{g})$	$\mathfrak{g}$ 的导子代数
$\det A$	A 的行列式
dim	维数
$\delta(n,F)$	F 上 n 阶对角方阵代数
Δ	根系
Δ_+	正根系
Δ_-	负根系
E_6, E_7, E_8	例外单李代数
End	自同态集合
$\mathrm{ent}_{ij} A$	矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素
exp	指数映射
F_4	例外单李代数
G_2	例外单李代数
$GL(n,F), GL(V)$	一般线性群
$gl(n,F), gl(V)$	一般线性李代数

$\mathrm{Hom}(V,W)$	V 到 W 的同态的集合
I_n	n 阶单位方阵
id	恒等映射
ind	诱导表示
$\mathrm{Int}\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}$ 的内自同构群
Ker	核
$L(\cdots)$	…生成的线性空间
$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$	$\mathfrak{m}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的正规化子
$\mathfrak{n}(n,F)$	F 上 n 阶上三角幂零方阵代数
Π	素根系
$\mathrm{row}_i A$	矩阵 A 的第 i 行
$sl(n,F),sl(V)$	特殊线性李代数
$so(n,F),so(V)$	正交李代数
$sp(n,F),sp(V)$	辛李代数
$S(V)$	V 的对称张量代数
$su(n)$	特殊酉李代数
$\mathfrak{t}(n,F)$	F 上 n 阶上三角方阵代数
$\mathrm{tr}A$	A 的迹
$T(V)$	V 的张量代数
χ_ρ	ρ 的特征标
$u(n)$	酉李代数
$\dotplus$	直和
$\oplus$	理想直和
$\rtimes$	半直积,开口对着正规子群